# An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. április 4., 11:16)

# Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

# 6. Mérték szerinti integrál

## 6.1. Mérhető függvények

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel, mérhető függvények kompozíciója, összege, szorzata stb., megszámlálható sok mérhető függvény pontonként szuprémuma, infimuma, liminfje, szuprémuma, a konvergenciahalmaz mérhetősége. [Petruska, 52–56. o.]

**6.1. lemma.** *Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér és $f : X \to Y$. Ekkor*

$$\mathcal{N} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$$

*$\sigma$-algebra $Y$-on.*

**6.2. definíció.** *Legyen $(X, \mathcal{M})$ és $(Y, \mathcal{N})$ mérhető terek és $f : X \to Y$.*
*Az $f$ leképezés "$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mérhető", ha minden $A \in \mathcal{N}$-re $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.*
*Ha $\mathcal{N} = \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{M}$-mérhető vagy csak "mérhető".*
*Ha $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, akkor "Borel-mérhető".*
*Ha $\mathcal{M} = \mathcal{L}$, akkor "Lebesgue-mérhető".*
*Sokszor nem a $\sigma$-algebrával, hanem a mértékkel fejezzük ki: "$\mu$-mérhető".*

**6.3. megjegyzés.** *Elég az $\mathcal{N}$ egy generátorrendszerére ellenőrizni. Például a Borelhalmazokat generálják a $(-\infty, a)$ vagy a $(-\infty, a]$ stb. félegyenesek, tehát $f$ akkor és csak akkor mérhető, ha*
*(1) minden $a \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$;*
*(2) minden $a \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$;*
*(3) minden $a \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}((a, \infty)) = \{x : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$;*
*(4) minden $a \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}([a, \infty)) = \{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.*
*(5) minden $G \subset R$ nyílt halmazra $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in G\} \in \mathcal{M}$.*
*Speciálisan, minden folytonos függvény Borel-mérhető, és minden monoton $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mérhető.*

**6.4. lemma.** *Ha $g$ mérhető és $f$ folytonos, akkor $f \circ g$ mérhető.*

**6.5. tétel.** *Ha $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor $f + g$, $f^2$, $1/f$, $fg$, $f/g$ is mérhető.*

**6.6. tétel.** *Ha $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor*
*(1) $\sup f_n$ és $\inf f_n$ mérhető.*
*(2) $\limsup f_n$ és $\liminf f_n$ mérhető.*
*(3) Azon pontok halmaza, ahol $\lim f_n$ létezik, mérhető, és a $\lim f_n$ függvény is mérhető.*

## 6.2. Egyszerű függvények. Az integrál definíciója

Egyszerű függvények. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Monoton konvergencia tétele. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Fatou-lemma. Valós és komplex értékű függvények integrálja. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Fatou-Lebesgue tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Az $\mathcal{L}_1$ tér. Az $L_1$ tér egységgömbje zárt a pontonkénti konvergenciára. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $\sum f_n$ m.m. konvergens. (Petruska II, 11. fej.)

**6.7. definíció.** *Egyszerű függvény*

**6.8. definíció.** *Egyszerű függvény integrálja*

**6.9. mese.** *Lehetne pozitív mérhető függvény alsó és felső integrálját definiálni, de automatikusan megegyezik. Ezért hivatalosan csak az alsó integrált definiáljuk.*

**6.10. tétel.** *Nemnegatív egyszerű függvényekre (1) Ha $f \le g$, akkor $\int_X f\mathrm{d}\mu \le \int_X g\mathrm{d}\mu$;*
*(2) $\int_A c\mathrm{d}\mu = c\mu(A)$*
*(3) Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$*
*(4) $A \subset B$ esetén $\int A\mathrm{d}\mu = \int_B \chi_A f\mathrm{d}\mu$*
*(5) $c, d \ge 0$ esetén $\int(cf + dg) = c\int f + d\int g$;*
*(6) Rögzített $f$ egyszerű függvéyre $\varphi(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$ mérték.*

**Bizonyítás.** (6) Az $f$ egyszerű függvénym tehát vannak olyan $F_1, \dots, F_n$ halmazok és $c_1 \dots, c_n \ge 0$ számok, hogy $f = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{F_i}$.

Azt kell ellenőriznünk, hogy $\varphi$ $\sigma$-additív. Tfh. $A = \bigcap_{k=1}^\infty B_k$ (diszjunktak). Ekkor

$$\varphi(A) = \int_A f = \sum_{i=1}^n c_i\mu(A \cap F_i) = \sum_{i=1}^n c_i\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) \cap F_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k \cap F_i) =$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^n c_i\mu(B_k \cap F_i)\right) = \sum_{k=1}^\infty \int_{B_k} f\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \varphi(B_k).$$

**6.11. tétel.** *(1) Ha $f \le g$, akkor $\int_X f\mathrm{d}\mu \le \int_X g\mathrm{d}\mu$;*
*(2) $\int_A c\mathrm{d}\mu = c\mu(A)$*
*(3) Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$*
*(4) $A \subset B$ esetén $\int A\mathrm{d}\mu = \int_B \chi_A f\mathrm{d}\mu$*
*(5) $c \ge 0$ esetén $\int cf = c\int f$;*
*(6) $\int(f + g) = \int f + \int g$.*

Az utoló bizonyítása később.

**6.12. tétel** (monoton konvergencia tétele)**.** *Ha $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ mérhetők és $f = \lim f_n$ (pontonként), akkor*

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu$$

*avagy,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu \int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)\mathrm{d}\mu.$$

**6.13. lemma.** *Legyen $g$ egyszerű függvény, és legyen $\varepsilon > 0$ esetén $g_\varepsilon(x) = \max(g(x) - \varepsilon, 0)$. Ekkor $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int g_\varepsilon\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu$.*

**Bizonyítás.** Legyen $f = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$, ahol mondjuk $0 < c_1 < \dots < c_n$, és legyen $\varepsilon < \min c_i$.
$\sum \mu(A_i) = \infty$, akkor $\int g_\varepsilon\mathrm{d}\mu = \infty$.
Ha $\sum \mu(A_i)$ véges, akkor $\int g_\varepsilon\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu - \varepsilon\sum \mu(A_i)$.

**Bizonyítás.**[MKT] Az $\int f_n$ sorozat mon nő, van határértéke; legyen $\alpha = \lim \int f_n$. Minden $n$-re $f_n \le f$, tehát $\int f_n \le \int f$ és így $\lim \int f_n \le \int f$; az a kérdés, hogy lehet-e $\alpha < \int f$.

Tegyük fel indirekte, hogy $\alpha = \lim \int f_n < \int f$. Az integrál definíciója miatt van olyan $g$ egyszerű függvény, amelyre $0 \le g \le f$ és $\alpha < \int g\mathrm{d}\mu \le \int f$. Legyen $g_\varepsilon$ mint a lemmában. A lemma miatt van olyan $\varepsilon > 0$, amire $\int g_\varepsilon > \alpha$.

Legyen $B_n = \{x \in X : \ f_n > f - \varepsilon\}$; a $B_n$ halmazon $f_n(x) \ge \max(f(x) - \varepsilon, 0) \ge g_\varepsilon(x)$. A monotonitás miatt $B_1 \subset B_2 \subset \dots$. Továbbá $f_n \to f$ miatt előbb-utóbb minden pont bekerül valamelyik $B_n$ halmazba, ezért $\bigcup B_n = X$. Legyen $\varphi(A) = \int_A g_\varepsilon\mathrm{d}\mu$; mint láttuk, ez mérték $X$-en. Ezek után

$$\alpha < \int_X g_\varepsilon\mathrm{d}\mu = \varphi(X) = \lim \varphi(B_n) = \lim \int_{B_n} g_\varepsilon\mathrm{d}\mu \le \lim \int_{B_n} f_n\mathrm{d}\mu \le \lim \int_X f_n\mathrm{d}\mu = \alpha,$$

ellentmondás.

**6.14. megjegyzés.** *Csökkenő sorozatra nem igaz, pl.* $\mathbb{R}$*-en* $f_n(x) = \frac{1}{n}$ *vagy* $(0,1)$*-en* $g_n = \frac{1}{nx}$*.*
*Vajon van olyan ellenpélda is, amikor* $\int f_n$ *véges?*

**6.15. tétel.** *Ha* $f, g \geq 0$ *mérhetőek, akkor* $\int(f+g) = \int f + \int g$*.*

**Bizonyítás.** Minden pozitív egész $n$-re legyen

$$f_n(x) = \max\left\{\frac{k}{2^n} :\ k \geq 0,\ 0 \leq \frac{k}{2^n} \leq \min(f(x), n)\right\}$$

és

$$g_n(x) = \max\left\{\frac{k}{2^n} :\ k \geq 0,\ 0 \leq \frac{k}{2^n} \leq \min(g(x), n)\right\}$$

Ezek pozitívak, mérhetők, $f_n \nearrow f$ és $g_n \nearrow g$; a MKT miatt

$$\int (f+g)\mathrm{d}\mu = \lim \int (f_n+g_n)\ \mathrm{d}u = \lim\left(\int f_n \mathrm{d}\mu + \int g_n\ \mathrm{d}u\right) = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu + \lim \int g_n\ \mathrm{d}u = \int f \mathrm{d}\mu + \int g\ \mathrm{d}u.$$

**6.16. tétel** (Beppo Levi)**.** *Ha* $f_1, f_2, \ldots \geq 0$ *mérhetők, akkor*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

**Bizonyítás.**

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n\right)\mathrm{d}\mu \overset{\text{mkt}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

**6.17. megjegyzés.** *Ha* $X = \mathbb{N}$ *és* $\mu$ *a számlálómérték, akkor visszakapjuk azt, hogy ha egy végtelen táblázatban nemnegatív számok vannak, akkor az oszlopösszegek összege egyenlő a s sorösszegek összegével.*

**6.18. tétel.** *Ha* $f \geq 0$ *mérhet, akkor* $A \to \varphi(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu$ *mérték.*

**Bizonyítás.** Most is csak az kell, hogy $\sigma$-additív. Legyen $A = \bigcup B_n$ (diszjunktak), akkor $\chi_A = \sum \chi_{B_n}$, és

$$\varphi(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{B_n} f\right)\mathrm{d}\mu \overset{\text{BL}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \chi_{B_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n).$$

**6.19. lemma** (Fatou)**.** *Ha* $f_1, f_2, \ldots \geq 0$ *mérhetők, akkor*

$$\int_X (\liminf f_n)\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

**Bizonyítás.** Ha $n \leq m$ pozitív egészek:

$$\inf_{k\geq n} f_k \leq f_m \quad \text{(mert a baloldalon az } f_m \text{ is szerepel)}$$

$$\int_X \left(\inf_{k\geq n} f_k\right)\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_m \mathrm{d}\mu$$

Infimum $m$ szerint:

$$\int_X \left(\inf_{k\geq n} f_k\right)\mathrm{d}\mu \leq \inf_{m\geq n} \int_X f_m \mathrm{d}\mu$$

$n \to \infty$:

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)\mathrm{d}\mu\right) \overset{\text{mkt}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\inf_{k\geq n} f_k\right)\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} \int_X f_m \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

**6.20. megjegyzés.** *1. Van olyan, hogy a két oldal nem egyenlő, pl.* $f_n = \chi_{(0,1)}$ *ha* $n$ *páros,* $f_n = \chi_{(1,2)}$ *ha* $n$ *páratlan.*

*2. A* $\liminf$ *helyett* $\limsup$*-pal egyik irányban sem igaz.*

*Az előző példában* $\int_{[0,2]} \limsup f_n = 2$ *és* $\lim \int f_n = 1$.

*A MKT-nél látott példákban* $\int \liminf f_n = 0$ *és* $\lim \int f_n = \infty$.

*Az* $X = \mathbb{R}$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$ *vagy* $g_n = n\chi_{(0,1/n)}$ *függvényekre* $\int \liminf f_n = 0$ *és* $\lim \int f_n = 1$, *illetve* $\int \liminf g_n = 0$ *és* $\lim \int g_n = 1$.

**6.21. megjegyzés.** *A Fatou-lemmát is érdekes felírni akár csak kéttagú összgekre:*

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n).$$

**6.22. definíció.** *Valós értékű függvényekre*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu$$

*ha kivonhatók.*

$f$ $\mu$ *szerint "integrálható", ha* $\int_X f_+ \mathrm{d}\mu$ *és* $\int_X f_- \mathrm{d}\mu$ *is véges.*

*Komplex értékű függvényre valós + képzetes rész, de csak akkor értelmezzük, ha mindkettő véges.*

**6.23. tétel.** *(1)* $\int_X f \mathrm{d}\mu$ *véges* $\Leftrightarrow \int_X |f| \mathrm{d}\mu$ *véges.*

*(2)* $\int_X (f+g) = \int f + \int g$, *ha mindkettő értelmes és összeadható.*

*(3)* $\int_X cf = c \int f$ *(komplexre is).*

*(4)* $\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu$.

**Bizonyítás.** (1) trivi.

(2): Elég valósra. Szétbontjuk az alaphalmazt 6 részre a két függvény előjel és nagyság szerint, részenként igaz az állítás.

(3) pozitív és negatív valós $c$-re is trivi. A komplex esetben kibontjuk valós és képzetes részekre.

(4) Először elforgatjuk $f$-et úgy, hogy $\int_X f \mathrm{d}\mu$ pozitív valós legyen. Utána

$$\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| = \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu.$$

**6.24. tétel** (kis Lebesgue-tétel; korlátos konvergencia tétele)**.** *Ha* $\mu(X)$ *véges,* $f_n$ *egyenletesen korlátos, és* $f_n \to f$ *pontoként, akkor*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu,$$

*avagy*

$$\int_X (\lim f_n) \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

**6.25. tétel** (nagy Lebesgue-tétel; dominált konvergencia tétele)**.** *Ha* $g \geq 0$ *integrálható,* $|f_n| \leq g$ *és* $f_n \to f$ *pontoként, akkor*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu,$$

*avagy*

$$\int_X (\lim f_n) \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

*A* $g$ *a "domináns" függvény.*

**6.26. tétel** (Fatou-Lebesgue)**.** *Ha* $g \geq 0$ *integrálható, és* $|f_n| \leq g$, *akkor*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n) \mathrm{d}\mu.$$

**Bizonyítás.** A nagy Lebesgue-tételből következik a kis Lebesgue-tétel: ha $|f_n| \leq M$ minden $n$-re, akkor $g = M$ jó domináns.

A Fatou-Lebesgue tételből következik a nagy Lebesgue, mert $\liminf f_n = \limsup f_n = \lim f_n$.

A Fatou-Lebesgue tételben a egyenlőtleségek bizonyítása: Fatou-lemma a $g + f_n$ függvényre; triviális; Fatou-lemma a $g - f_n$ függvényre.

**6.27. definíció.** *Legyen $T : X \to \{igaz, hamis\}$. $T$ az $A$ halmazon $\mu$-m.m. teljesül, ha van olyan $N$ nullmértékű halmaz, hogy $A \setminus N$-en $T$ konstans igaz.*

*Trivi: Ha $f = g$ m.m., akkor $\int_X f = \int_X g$.*

*$f$ $\mu$-majdnem mérhető, ha egy nullmértékű halmazon megváltoztathatjuk/definiálhatjuk úgy, hogy mérhető legyen.*

**6.28. következmény.** *Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren integrálható, valós vagy komplex értékű függvények valós, illetve komplex vektorteret alkotnak. Ezt $\mathcal{L}_1(X)$-szel vagy $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu)$-vel vagy csak $\mathcal{L}_1$-gyel fogjuk jelölni.*

*Egy $f \in \mathcal{L}_1$ függvény "normája": $\|f\|_1 = \int_X |f| \mathrm{d}\mu$.*

*A háromszög-egyenlőtlenség triviálisan teljesül.*

*Ez így még nem metrikus tér, de faktorizálhatunk a m.m. nulla függvények terével.*

**6.29. tétel.** *Ha $\|f_n\|_1 \leq 1$, és $f_n \to f$, akkor $\|f\|_1 \leq 1$.*

**Bizonyítás.** A Fatou-lemmából

$$\|f\|_1 = \int_X (\liminf |f_n|) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu \leq 1.$$

**6.30. tétel.** *Ha $\sum \|f_n\|_1 < \infty$, akkor m.m. $x$-re $\sum f_n(x)$ konvergens.*

**Bizonyítás.** Legyen $g = \sum |f_n|$. A Beppo Levi tétel miatt

$$\int_X g \mathrm{d}\mu = \sum \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum \|f_n\|_1 < \infty,$$

ezért $g < \infty$ m.m.. Akkor viszont $\sum f_n(x)$ m.m. $x$-re abszolút konvergens, tehát konvergens.