An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. április 3., 14:36)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

7. Riemann(-Stieltjes) és Lebesgue(-Stieltjes) integrálok

7.1. definíció. *Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \mathbb{R}$. Az f függvény felső és alsó burkolója*

$$\overline{f}(x) = \lim_{r\to+0} \Big(\sup f\big(B(x,r)\cap A\big)\Big), \quad \textit{illetve} \quad \underline{f}(x) = \lim_{r\to+0} \Big(\inf f\big(B(x,r)\cap A\big)\Big).$$

7.2. lemma.
(1) $\underline{f} \le f \le \overline{f}$;
(2) $\underline{f}(a) = \overline{f}(a)$ akkor és csak akkor, ha f folytonos a-ban.

7.3. definíció. *Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \mathbb{R}$. Az f függvény "felülről félig folytonos" (f.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in B(a,\delta)\cap A \;\; f(x) > f(a) - \varepsilon,$$

illetve "alulról félig folytonos" (a.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in B(a,\delta)\cap A \;\; f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

7.4. lemma.
(1a) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor f.f.f., ha bármely $c \in \overline{\mathbb{R}}$-re $f^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ relatív nyílt.
(1b) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor a.f.f., ha bármely $c \in \overline{\mathbb{R}}$-re $f^{-1}\big((c, \infty)\big)$ relatív nyílt.
(2) A felső burkoló f.f.f., az alsó burkoló a.f.f..

7.5. következmény. *Az alsó és a felső burkoló is Borel-mérhető.*

7.6. lemma. *Ha $I_1, I_2, \ldots$ intervallumsorozat, amelyeknek a közös belső pontja, és $|I_n| \to 0$, akkor* $\inf f(I_n \cap A) \to \underline{f}(a)$ *és* $\sum f(I_n \cap A) \to \overline{f}(a)$.

A továbbiakban $G \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $g : G \to \mathbb{R}$ monoton növekvő; μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték. Továbbá $[a,b] \subset G$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos, és feltételezzűk, hogy f-nek és g-nek az $[a,b]$ intervallumra megszorítva nincs közös szakadási helye.

7.7. definíció. *Felosztás: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ pontok g-nek folytonossági pontjai.*

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf f\big([x_{i-1}, x_i]\big)\Big)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \quad S_F = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup f\big([x_{i-1}, x_i]\big)\Big)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \sup\{s_F : \; F \textit{ felosztás}\}, \qquad \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = \inf\{S_F : \; F \textit{ felosztás}\}$$

7.8. lemma.

(1) Ha F_2 finomítása F_1-nek, akkor $s_{F_1} \le s_{F_2} \le \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$ és $S_{F_1} \ge S_{F_2} \ge \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$.

(2) $\underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g \le \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$.

(3) Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely, δ-nál finomabb F felosztásra $s_F > \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g - \varepsilon$ és $S_F < \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g + \varepsilon$. A bizonyítás ugyanaz, mint a Riemann-integrálnál, házi feladat végiggondolni.

(4) A RS-integrál akkor és csak akkor létezik, ha $\underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$; ilyenkor persze $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$.

A bizonyítás ugyanaz, mint a Riemann-integrálnál, házi feladat végiggondolni.

7.9. lemma. *Van olyan F_n felosztássorozat, amiben*

(1) mindegyik felosztásnak finomítása a következő felosztás;

(2) $\delta(F_n) \to 0$;

(3) $s_{F_n} \to \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$ és $S_{F_n} \to \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g$.

Bizonyítás. Rekurzívan, $F_0 = (a, b)$. Ha F_{n-1} már van: vegyünk egy-egy olyan G_1, G_2, G_3 felosztást, amire $\delta(G_1) < \frac{1}{n}$; $s_{G_2} > \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g - \frac{1}{n}$; $S_{G_3} < \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g + \frac{1}{n}$. Ezek után legyen F_n az F_{n-1}, G_1, G_2, G_3 egy közös finomítása.

7.10. tétel. *Tegyük fel, hogy g balról folytonos a-ban és jobbról folytonos b-ben.*

Legyen μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték. Ekkor

$$\underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} \underline{f}\mathrm{d}\mu \quad \text{és} \quad \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} \overline{f}\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Az integrálok léteznek, mert a burkolók Borel-mérhetők.

Vegyük az előbbi felosztássorozatot; az F_n felosztásból készített alsó és felső lépcsősfüggvény legyen $\alpha_n(x)$, illetve $\beta_n(x)$.

A finomodás miatt $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ és $\beta_n \ge \beta_{n+1}$.

Majdnem minden $\in [a, b]$ pontra ráhúzódnak a felosztások intevallumai, így $\alpha_n(x) \to \underline{f}(x)$ és $\beta_n(x) \to \overline{f}(x)$, kivéve azokat a pontokat, amik valamelyik felosztásnak belső osztópontjai.

A belső osztópontok a g-nek folytonossági pontjai, ezért az összes belső osztópontok halmaza μ-nullmértékű. A felosztás belső intervallumainak mértéke $\mu((x_i, x_j)) = g(x_j) - g(x_i)$. A végpontokban g a külső odalról folytonos, ezért $\mu([a, x_1]) = g(x_1) - g(a)$ és $\mu((x_i, b]) = g(b) - g(x_i)$. Tehát $\alpha_n \to \underline{f}$ és $\beta_n \to \overline{f}$, μ-m.m., és

$$\underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \lim s_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \alpha_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{kkt}}{=} \int_{[a,b]} \underline{f}\mathrm{d}\mu$$

és

$$\overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \lim S_{F_n} = \lim \int_{[a,b]} \beta_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{kkt}}{=} \int_{[a,b]} \overline{f}\mathrm{d}\mu$$

7.11. tétel. *Tegyük fel, hogy g balról folytonos a-ban és jobbról folytonos b-ben, és legyen μ a g megváltozásából származtatott LS-mérték.*

(1) Az $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes integrál akkor és csak akkor létezik, ha nincs olyan pont, ahol f és g is szakad, és az f függvény μ-m.m. folytonos.

(2) Ha az $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes integrál létezik, akkor az f függvény μ-mérhető, és $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}\mu$.

Bizonyítás. (1) A RS integrál létezik $\Leftrightarrow \underline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g = \overline{\int}_a^b f\,\mathrm{d}g \Leftrightarrow \int_{[a,b]} \underline{f}\mathrm{d}\mu = \overline{f}\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f})\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \overline{f} - \underline{f} = 0$ μ-m.m. $\Leftrightarrow f$ μ-m.m. folytonos.

(2) Ha a RS integrál létezik, akkor $f = \underline{f}$ μ-m.m., tehát f μ-majdnem Borel-mérhető.