An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. április 4., 11:17)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

8. Előjeles mértékek és variációik

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt. Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. (Petruska II, 17. fej.)

Mindig ugyanazon az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk játszani.

8.1. definíció. *$\vartheta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték, ha $\vartheta(\emptyset) = 0$ és σ-additív.*
$\vartheta : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ komplex mérték, ha $\vartheta(\emptyset) = 0$ és σ-additív. (Az értéke csak véges lehet.)

8.2. példa. *Hogy gyárthatunk előjeles és komplex mértékeket? Pl. két mérték különbsége; valós, illetve komplex értékű függvény integrálja...*

8.3. tétel. *Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent.*

Bizonyítás. Ha $\vartheta(P) = +\infty$ és $\vartheta(N) = -\infty$, akkor az $A = P \setminus N$, $B = N \setminus P$ és $C = P \cap N$ halmazokra $\vartheta(A) + \vartheta(C) = \vartheta(P) = +\infty$, $\vartheta(B) + \vartheta(C) = \vartheta(N) = -\infty$, emiatt $\vartheta(A)$, $\vartheta(B)$, $\vartheta(C)$ között is mindkét végtelen szerepel, de ezeket össze kellene tudni adnunk...

8.4. definíció. *A $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mérték majorálja az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles/komplex mértéket, ha minden $A \in cM$-re $\big|\vartheta(A)\big| \leq \mu(A)$.*

8.5. definíció. *Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték totális variációja*

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sup\{|\vartheta(B)| + |\vartheta(C)| : B, C \subset A, B \cap C = \emptyset\} \\ &= \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_k)| : n \in \mathbb{N}, B_k \subset A, B_k \cap B_\ell = \emptyset\} \\ &= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_k)| : B_k \subset A, B_k \cap B_\ell = \emptyset\}\end{aligned}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ komplex mérték totális variációja

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_n)| : n \in \mathbb{N}, B_k \subset A, B_k \cap B_\ell = \emptyset\} \\ &= \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_n)| : n \in \mathbb{N}, B_k \subset A, B_k \cap B_\ell = \emptyset\}\end{aligned}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték pozitív variációja

$$\pi(A) = \sup\{\vartheta(B) : B \subset A\}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték negatív variációja

$$\nu(A) = \sup\{-\vartheta(B) : B \subset A\}$$

8.6. tétel. *τ, π, ν mértékek.*
τ majorálja ϑ-t, π-t és ν-t.
A τ a legkisebb mérték, ami majorálja ϑ-t.

Bizonyítás. π mérték: trivi, hogy $\pi(A) \geq \vartheta(\emptyset) = 0$, tehát $\pi \geq 0$. Az is trivi, hogy $\pi(\emptyset) = 0$. Azt kell bizonyítani, hogy π σ-additív. Tegyük fel, hogy $A_1, \ldots \in \mathcal{M}$ diszjunktak és $A = \bigcup A_n$.

Mindegyik n-hez vegyünk egy olyan $B_{n,k} \subset A_n$ sorozatot, amire $0 \leq \vartheta(B_{n,k}) \to \pi(A_n)$. Ekkor minden k-re és N-re

$$\sum_{n=1}^{N} \vartheta(B_{n,k}) = \vartheta\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_{n,k}\Big) \leq \pi(A).$$

Most $k \to \infty$, majd $N \to \infty$ határátmenet:

$$\sum_{n=1}^{N} \pi(A_n) \leq \pi(A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \leq \pi(A). \tag{1a}$$

Megfordítva, legyen $C_k \subset A$ olyan sorozat, amelyre $\vartheta(C_k) \to \pi(A)$, és legyen $C_{n,k} = A_n \cap C_k$. Ekkor

$$\vartheta(C_k) = \vartheta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n);$$

A $k \to \infty$ határátmenetből

$$\pi(A) = \lim_{k\to\infty} \vartheta(C_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n). \tag{1b}$$

Az (1a) és (1b) együtt azt adja, hogy

$$\pi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n).$$

τ mérték: $\tau(\emptyset) = 0$, és triviális, hogy $\tau(A) \geq \vartheta(\emptyset) = 0$; most is a σ-additivitás kell; Legyen megint $A = \bigcap A_n$, diszjunktak.

Mindegyik A_n-hez és mindegyik k-hoz vegyük $\tau(B_n)$-nek egy közelítő összegét úgy, hogy ezek $k \to \infty$ esetén $\tau(B_n)$-hoz tartsanak, vagyis vegyük $B_{n,k,\ell} \subset A_n$ halmazok sorozatának egy sorozatát úgy, hogy mindegyik n, k-ra az $B_{n,k,1}, B_{n,k,2}, \ldots$ halmazok diszjunktak, és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})| = \tau(A_n)$. Rögzített k-ra a $B_{n,k,\ell}$ halmazok diszjunkt részei A-nak, ezért minden N-re

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})| \right) \leq \tau(A).$$

$k \to \infty$ majd $N \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} \tau(A_n) \leq \tau(A).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n) \leq \tau(A).$$

A megfordításhoz vegyük $\tau(A)$ közelítő összegeinek egy sorozatát, vagyis $C_{k,\ell} \subset A$ halmazokat úgy, hogy rögzített k-ra $C_{k,1}, C_{k,2}, \ldots$ diszjunktak, és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \tau(A)$. Legyen $C_{n,k,\ell} = A_n \cap C_{k,\ell}$.

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \vartheta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k,\ell} \Big) \right| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k,\ell}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\vartheta(C_{n,k,\ell})\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \big|\vartheta(C_{n,k,\ell})\big| \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$$

$k \to \infty$:

$$\tau(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n).$$

Az triviális, hogy τ majorál, és a legkisebb.

8.7. lemma. *Ha ϑ előjeles mérték, akkor léteznek olyan $A, B \subset X$ halmazok, amelyekre $\pi(X) = \vartheta(A)$ és $\nu(X) = -\vartheta(B)$.*

Bizonyítás. A π-re bizonyítunk.

1. eset: $\pi(X) = \infty$, azaz ϑ nem korlátos felülről.

Nevezzünk egy $V \in \mathcal{M}$ halmazt "végtelennek", ha $\pi(V) = \infty$, és egy végtelen V halmazt "bonthatónak" (v.ö. "Rontom-bontom, kisnyulacska!"), ha vannak olyan E és V' diszjunkt részhalmazai, amelyekre $\vartheta(E) \geq 1$ és $\pi(V') = \infty$.

1.a. eset: Minden végtelen halmaz bontható. Ekkor bontva és továbbontva

$$X \supset E_1 \cup V_1 \supset E_1 \cup (E_2 \cup V_2) \supset E_1 \cup (E_2 \cup (E_3 \cup V_3)) \supset \ldots;$$

de akkor $E_1, E_2, \ldots$ diszjunkt halmazok, mindegyikre $\vartheta(E_n) \geq 1$, így az $A = \bigcup E_n$ halmazra $\vartheta(A) = \infty$.

1.b. eset: Van nem bontható végtelen halmaz. Legyen V_0 nem bontható végtelen halmaz; ennek persze a végtelen részhalmazai sem bonthatók. Indirekt tegyük fel, hogy ϑ értéke soha sem ∞.

Definiáljunk egy $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, végtelen, nem bontható halmazokból álló sorozatot. V_0 már megvan. Ha V_n már megvan, akkor legyen $V_{n+1} \subset V_n$ olyan, amelyre $\vartheta(V_{n+1}) > \max(\vartheta(V_n) + 1, 1)$; ilyen van, mert $\pi(V_n) = \infty$. A $V_n \setminus V_{n+1}$ nem lehet végtelen halmaz, mert V_n nem bontható. Tehát V_{n+1} is végtelen halmaz, ráadásul része a nem bontható V_n-nek, tehát ő sem bontható.

Most legyen $K_n = V_n \setminus V_{n+1}$; ekkor

$$\vartheta(K_n) = \vartheta(V_n) - \vartheta(V_{n+1}) < -1$$

Az $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ halmazra ezért $\vartheta(N) = -\infty$. De az lehetetlen, hogy a pozitív mértékű V_1-nek legyen egy $-\infty$ mértékű részhalmaza.

2. eset: $\pi(X)$ véges, azaz ϑ felülről korlátos.

Szükségünk lesz a következő becslésre: ha $\vartheta(H) \geq \pi(X) - \varepsilon$, és $R \subset H$, akkor

$$\vartheta(R) = \vartheta(H) - \vartheta(H \setminus R) \geq (\pi(X) - \varepsilon) - \pi(X) = -\varepsilon.$$

Vegyünk minden n pozitív egészhez egy $P_n \in \mathcal{M}$ halmazt, amire $\vartheta(P_n) \geq \max(\pi(X) - \frac{1}{2^n}, 0)$. Legyen $Q_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n$ (a Q_n sorozat csökkenő) és $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. (Az $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} P_n \right)$ halmazt hívjuk a P_n halmazsorozat "limesz szuperior"-ának.)

$$Q_k = P_k \cup \Big(P_{k+1} \setminus P_k\Big) \cup \Big(P_{k+2} \setminus (P_k \cup P_{k+1})\Big) \cup \Big(P_{k+3} \setminus (P_k \cup P_{k+1} \cup P_{k+2})\Big) \cup \ldots$$

$$\vartheta(Q_k) = \vartheta(P_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \vartheta\left(P_n \setminus \bigcup_{\ell=k}^{n-1} P_\ell\right) > \left(\pi(X) - \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi(X) - \frac{2}{2^k}$$

$$0 \leq \pi(X) - \vartheta(A) < \vartheta(Q_k) + \frac{2}{2^k} - \vartheta(A) = \vartheta(Q_k \setminus A) + \frac{2}{2^k} = \sum_{n=k}^{\infty} \vartheta(Q_n \setminus Q_{n+1}) + \frac{2}{2^k} < \sum_{n=k}^{\infty} \left(\vartheta(Q_n \setminus Q_{n+1}) + \frac{2}{2^n}\right).$$

Az utolsó szumma tagjai nemnegatívak, mert $\vartheta(Q_n \setminus Q_{n+1}) > -\frac{2}{2^n}$. Az összege pedig véges, mert például $\vartheta(Q_k \setminus A)$ is véges. Ha k-val tartunk ∞-be, a szumma 0-hoz tart, ezért $\pi(X) - \vartheta(A) = 0$, vagyis $\vartheta(A) = \pi(X)$.

8.8. következmény. *$\pi(X)$ és $\nu(X)$ közül legalább az egyik véges.*

Bizonyítás. A 8.7 lemma szerint $\pi(X)$ és $-\nu(X)$ is értéke ϑ-nak, de a 8.3 tétel szerint nem lehet mindkettő végtelen.

8.9. tétel (Hahn-felbontás)**.** *Ha ϑ előjeles mérték: X felbontható két diszjunkt részre: $X = P \cup N$ úgy, hogy $\pi(N) = 0$ és $\nu(P) = 0$.*

Bizonyítás. 1. eset: $\pi(X) < \infty$.

Legyen $P \subset X$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta(P) = \pi(X)$ és $N = X \setminus P$.

Tetszőleges $H \subset P$ esetén $\vartheta(H) = \vartheta(P) - \vartheta(P \setminus H) \geq \pi(X) - \pi(X) = 0$, így valóban $\nu(P) = 0$.

Tetszőleges $H \subset N$ esetén $\vartheta(H) = \vartheta(P \cup H) - \vartheta(P) \leq \pi(P) - \pi(P) = 0$, így valóban $\pi(N) = 0$.

2. eset: $\pi(X) = \infty$. Ekkor $\nu(X)$ véges, felcseréljük P és N definícióját.

8.10. kérdés. *Egyértelmű a Hahn-felbontás?*

Nem. De τ-majdnem: ha $X = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ két Hahn-felbontás, akkor az $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2 = (P_1 \cup P_2) \cap (N_1 \cup N_2)$ halmazon $\pi = \nu = 0$, vagyis a szimetrikus differencián ϑ konstans 0 és $\tau(P_1 \triangle P_2) = 0$.

8.11. következmény. *$\pi(A) = \vartheta(A \cap P)$ és $\nu(A) = -\vartheta(A \cap N)$.*

Bizonyítás. Bármilyen $B \subset A$-ra $\vartheta(B) = \vartheta(B \cap P) + \vartheta(B \cap N) \leq \vartheta(A \cap P) + 0$ és $B = A \cap P$ esetén egyenlőség van.

8.12. következmény (Jordan-felbontás)**.** *Ha ϑ előjeles mérték, akkor $\vartheta = \pi - \nu$.*

8.13. következmény. *$\tau = \pi + \nu$.*

8.14. következmény. *$\vartheta(X)$ akkor és csak akkor véges, ha $\pi(X)$ és $\nu(X)$ véges.*

Minden komplex mérték totális variációja véges.

8.15. következmény.

$$\vartheta(A) = \int_A (\chi_P - \chi_N) \mathrm{d}\tau. \qquad (*)$$

Tehát, minden előjeles mérték előáll integrálként...

8.16. kérdés. *Vajon igaz-e valami $(*)$-hez hasonló összefüggés komplex mértékekre?*