An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. április 24., 18:37)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

9. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek

Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Mérték tartója. Lebesgue-felbontás. Radon-Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál. (Petruska II, 18. fej.)

9.1. mese.

Most is egy közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk dolgozni.

9.2. definíció. *Az $A \in \mathcal{M}$ halmaz a ϑ előjeles/komplex mértéknek "tartója", ha az $X \setminus A$ halmazon ϑ konstans* 0.

Például az $X = P \cup N$ Hahn-felbontásban π-nek a P, a ν-nek N egy tartója.

9.3. definíció. *Legyen α és β két mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.*

(1) Az α abszolút folytonos a β-ra nézve, ha bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén, ha $\beta(H) = 0$, akkor $\alpha(H) = 0$. Jele: $\alpha \ll \beta$,

(2) Az α és a β szinguláris egymásra nézve, ha X felbomlik két diszjunkt halmazra, $X = A \cup B$ úgy, hogy $\alpha(B) = 0$ és $\beta(A) = 0$. Avagy, α-nak és β-nak van diszjunkt tartója. Jele: $\alpha \perp \beta$.

(3) Ha előjeles vagy komplex mértékekről van szó, akkor ekvivalens definíciót kapunk, ha a mértékekt a totális variációjukra cseréljük: Ha ϑ a H halmaz minden részén 0*, akkor a totális variáció is* 0*.*

9.4. példa. *Ha $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, és μ mérték, akkor a $\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$ előjeles mérték abszolút folnytonos μ-re nézve.*

Ha μ majorálja a ϑ előjeles mértéket, akkor $\vartheta \ll \mu$.

Ha ϑ előjeles mérték, és a variációi τ, π és ν, akkor $\tau \ll \vartheta$, $\pi \ll \tau$, $\nu \ll \tau$, $\pi \ll \vartheta$, $\nu \ll \vartheta$, $\pi \perp \nu$.

9.5. lemma.

1. *Ha $\alpha \ll \beta$ és $\alpha \perp \beta$, akkor $\alpha = 0$.*
2. *Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \ll \gamma$, akkor $\alpha \ll \gamma$. ($\ll$ tranzitív, mint az "osztója" vagy a "megette".)*
3. *Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ mértékek, akkor $\alpha_1 \ll \sum \alpha_k$.*
4. *Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ll \beta$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ll \beta$.*
5. *Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \perp \gamma$, akkor $\alpha \perp \gamma$.*
6. *Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \perp \beta$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \perp \beta$.*

9.6. tétel (Lebesgue-felbontás)**.** *Legyen ϑ σ-véges előjeles vagy komplex mérték, $\mu \geq 0$ σ-véges mérték a közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.*

Ekkor ϑ egyértelműen felbontható egy μ-re nézve abszolút folytonos és egy μ-re nézve szinguláris előjeles, illetve komplex mérték összegére, azaz egyértelműen vannak olyan $\alpha \ll \mu$ és $\beta \perp$ mu előjeles, illetve komplex mértékek, amelyekre $\vartheta = \alpha + \beta$.

9.7. megjegyzés. *Arra nem is lesz szükségünk, hogy μ σ-véges; csak a μ-nullmértékű halmazok rendszerét (σ-ideálját) fogjuk használni.*

Bizonyítás.

1. eset: ϑ véges.

Konstruálunk egy maximális szinguláris mértéket; ez lesz β, a maradék α.

Legyen τ totális variációja τ, legyen $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N)\}$ a μ-nullmértékű halmazok félgyűrűje, és legyen

$$s = \sup\{\tau(N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

A jobboldalon a halmazban szerepel a $0 = \tau(\emptyset)$, így a definíció értelmes, és $s \geq 0$. Az is igaz, hogy bármely $N \in \mathcal{N}$-re $\tau(N) \leq \tau(X)$, így $s \leq \tau(X)$, ami véges.

A szuprémumot tetszőleges pontossággal megközelíthetjük: minden pozitív egész n-hez van egy olyan $Z_n \in \mathcal{N}$ halmaz, amelyre $\tau(Z_n) > s - \frac{1}{n}$. Legyen $Z = \bigcup Z_n$; ez megszámlálható sok μ-nullmértékű hamaz uniója, ez is μ-nullmértékű: $Z \in \mathcal{N}$.

Bármely n-re $Z_n \subset Z$; a τ monotonitása miatt

$$\forall n \qquad s - \frac{1}{n} < \tau(Z_n) \leq \tau(Z) \leq s,$$

az $n \to \infty$ határátmenetből

$$\tau(Z) = s.$$

Tehát a szuprémum valójában maximum.

Ezek után legyen $H \in \mathcal{M}$ esetén

$$\alpha(H) = \vartheta(H \setminus Z), \qquad \beta(H) = \vartheta(H \cap Z),$$

Az világos, hogy $\alpha(H) + \beta(H) = \vartheta(H)$.

A Z halmaz a β mértéknek μ-nullmértékű tartója, tehát $\beta \perp \mu$.

Annak igazolásához, hogy $\alpha \ll \mu$, vegyünk egy tetszőleges μ-nullmértékű N halmazt. Erre $N \cup Z$ is μ-nullmértékű, és

$$0 \leq \big|\alpha(N)\big| = \big|\vartheta(N \setminus Z)\big| \leq \tau(N \setminus Z) = \tau(N \cup Z) - \tau(Z) \leq s - s = 0.$$

Tehát, ha $\mu(N) = 0$, akkor $\vartheta(N) = 0$; tényleg $\vartheta \ll \mu$.

Az egyértelműség bizonyítása:

Tegyük fel, hogy kétféle Lebesgue-felbontás is van:

$$\vartheta = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2.$$

Ekkor az

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$$

mérték egyszerre abszolút folytonos és szinguláris, vagyis konstans 0.

2. eset: ϑ σ-véges.

Bontsuk fel az alaphalmazt megszámlálható sok, páronként diszjunkt ϑ-véges cellára: $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Mindegyik X_n cellán a $\vartheta\big|_{X_n}$ mérték véges, így van egy egyértelmű Lebesgue-felbontása: $\vartheta = \alpha_n + \beta_n$. Ezeket próbáljuk — kellő óvatossággal — összeadni.

Az α_n és β_n-nek diszjunkt tartója is létezik: legyen α_n tartója $A_n \subset X_n$, a β_n tartója $B_n \subset X_n$, ekkor tehát $H \subset X_n$ esetén $\alpha_n(H) = \vartheta(H \cap A_n)$ és $\beta_n(H) = \vartheta(H \cap B_n)$.

Ezek után legyen $A = \bigcup A_n$, $B = \bigcup B_n$,

$$\alpha(H) = \vartheta(H \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(H \cap X_n),$$

$$\beta(H) = \vartheta(H \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(H \cap X_n).$$

Világos hogy ez a definíció értelmes, $\alpha + \beta = \vartheta$, $\alpha \ll \mu$ és $\beta \perp \mu$.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $\alpha_1 + \beta_1$ és $\alpha_2 + \beta_2$ is Lebesgue-felbontás; ekkor mindegyik X_n-re megszorítva a $\vartheta\big|_{x_n}$ mértéknek Lebesgue-felbontása a $\alpha_1\big|_{x_n} + \beta_1\big|_{x_n}$ és $\alpha_2\big|_{x_n} + \beta_2\big|_{x_n}$. A véges esetben a felbontás egyértelmű, ezért $\alpha_1\big|_{x_n} = \alpha_2\big|_{x_n}$ és $\beta_1\big|_{x_n} = \beta_2\big|_{x_n}$; de ezeket összeadva visszakapjuk az eredeti mértékeket.

9.8. megjegyzés. *Ha ϑ nem σ-additív, akkor nem biztos, hogy létezik Lebesgue-felbontás. Legyen például $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$ és ϑ a számlálómérték. Bármely pont Lebesgue-mértéke 0, a számlálómértéke poztív, így az abszolút folytonos rész tartója csak az üres halmaz lehetne. A szinguláris rész tartója csak Lebesgue-nullmértékű lehet. Ez a kettő együtt nem adhatja ki a teljes $\mathbb{R}$-et.*

9.9. tétel (Radon-Nikodym)**.** *Legyen α előjeles vagy komplex mérték, $\mu \geq$ szigma-véges mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.*

(1) Ha $\alpha \ll \mu$, akkor van olyan $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vagy $X \to \mathbb{C}$ μ-mérhető függvény, amelyre bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén $\alpha(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$. Az f neve "a α μ szerinti Radon-Nikodym deriváltja". Használatos az $f = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu}$ jelölés is: $\int_H \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu = \int_H \mathrm{d}\vartheta$.

(2) Ha α σ-véges, akkor a Radon-Nikodym derivált μ-majdnem egyértelmű.

Bizonyítás. I.a eset: $\alpha \geq 0$, mindkét mérték véges.

Legyen

$$\Phi = \left\{ f : X \to [0, \infty] \text{mérhető}, \ f \geq 0, \ \forall H \in \mathcal{M} \ \int_H f \mathrm{d}\mu \leq \alpha(H) \right\}$$

a nem túl nagy függvények halmaza, és

$$s = \sup \left\{ \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \alpha(X) : f \in \Phi \right\}$$

Világos, hogy $0 \leq s \leq \alpha(X)$.

(1) $0 \in \Phi$ (trivi).

(2) Ha $g, h \in \Phi$, akkor $m = \max(g, h) \in \Phi$.

Biz. Legyen $A = X(g \geq h)$ és $N = X(g < h)$. Bármely H-ra

$$\int_H m \mathrm{d}\mu = \int_{H \cap A} g \mathrm{d}\mu + \int_{H \cap B} h g \mathrm{d}\mu \leq \alpha(H \cap A) + \alpha(H \cap B) = \alpha(H).$$

(3) Ha $g_1, g_2, \ldots \in \Phi$ és $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$, akkor $h = \lim g_n \in \Phi$.

Biz. Bármely $H \in \mathcal{M}$-re és n-re

$$\int_H g_n \mathrm{d}\mu \leq \alpha H;$$

A monoton konvergencia tételből

$$\int_H h \mathrm{d}\mu \overset{\text{mkt}}{=} \lim \int_H g_n \mathrm{d}\mu \leq \alpha(H).$$

(4) Van olyan $f \in \Phi$, amelyre $\int_X f \mathrm{d}\mu = s$. Avagy, a szuprémum maximum is.

Biz. Vegyünk egy olyan $g_1, g_2, \ldots$ sorozatot, amelyre $\lim \int X g_n \mathrm{d}\mu = s$, és legyen $f_n = \max(g_1, \ldots, g_n) \in \Phi$. Ekkor $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$; legyen $f = \lim f_n$. Mivel $f_n \geq g_n$, az is igaz, hogy $\int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq s$; a rendőr-elv miatt $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to s$. A monoton konvergencia tétel miatt $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_X f_n \mathrm{d}\mu = s$.

(5) $s = \alpha(X)$.

Biz: indirekt. tegyük fel, hogy $s < \alpha$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ amire $\varepsilon \cdot \mu(X) < \alpha(X) - s = \alpha(X) - \int_X f \mathrm{d}\mu(X)$.

Legyen

$$\varphi(H) = \alpha(H) - \int_X (f + \varepsilon) \mathrm{d}\mu = \alpha(H) - \int_X f \mathrm{d}\mu - \varepsilon \cdot \mu(H).$$

Ekkor φ előjeles mérték, $\varphi \ll \mu$ és $\varphi(X) > 0$.

Legyen φ Hahn-felbontása $X = P \cup N$. Ekkor tehát bármely $H \subset P$ esetén $\varphi(H) \geq 0$, azaz $\int_X (f + \varepsilon) \mathrm{d}\mu \leq \alpha(H)$.

Mivel $\varphi(X) > 0$, ezért $\varphi(P) > 0$; viszont $\varphi \ll \mu$ miatt ebből következik, hogy $\mu(P) > 0$.

Legyen most $g = f + \varepsilon \cdot \chi_P$. Ez a függvény Φ-beli, mert bármely $H \in \mathcal{M}$-re

$$\int_H g \mathrm{d}\mu = \int_{H \cap N} f \mathrm{d}\mu + \int_{H \cap P} (f + \varepsilon) \mathrm{d}\mu = \alpha(H \cap N) + \alpha(H \cap P) = \alpha(H).$$

Ugyanakkor

$$\int_X g\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \varepsilon\cdot\mu(X) > \int_X f\mathrm{d}\mu = s,$$

ellentmondás.

(6) Ha $\int_X f\mathrm{d}\mu = s$, akkor minden H-ra $\alpha(H) = \int_H f\mathrm{d}\mu$.
Biz. $\varphi(H) = \alpha(H) - \int_H f\mathrm{d}\mu \geq 0$ mérték, de $\varphi(X) = 0$, tehát $\varphi = 0$.

I.b eset: φ véges előjeles mérték.

Vegyük α Jordan-felbontását: $\alpha = \pi - \nu$, végesek. Mivel $\pi, \nu \ll \theta \ll \mu$, a pozitív és negatív variációnak is létezik Radon-Nikodym deriváltja.

I.c eset: φ véges komplex mérték.

Az α valós és képzetes része is véges, aboszlút folytonos mérték, van Radon-Nikodym deriváltjuk.

Egyértelműség:

Elég a valós esetre. Ha f és g is Radon-Nikodym derivált, akkor legyen $A = X(f > g)$ és $B = X(f < g)$. Ekkor

$$\int_A (f-g)\mathrm{d}\mu = \int_A f\ \mathrm{d}u - \int_A g\mathrm{d}\mu = \alpha(A) - \alpha(A) = 0;$$

A baloldalon az integrandus pozitív; az integrál csak úgy lehet 0, ha $\mu(A) = 0$. Hasonlóan látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Így hát $f = g$ μ-m.m.

II.a eset: α előjeles, és μ is σ-véges.

Osszuk fel a teret diszjunkt cellákra: $X = \bigcup X_n$ úgy, hogy minden cellán α és μ is véges. Mindegyik cellán van egy-egy Radon-Nikodym derivált; ezekből készítsünk egy nagy közös f függvényt, amelynek a cellákra vett megszorításai a RND-k. Bármely H-ra

$$\alpha_+(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_+(H\cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H\cap X_n} f_+\mathrm{d}\mu = \int_H f_+\mathrm{d}\mu$$

és ugyanígy

$$\alpha_-(H) = \int_H f_+\mathrm{d}\mu,$$

az utóbbi még véges is, így

$$\alpha(H) = \alpha_+(H) - \alpha_-(H) = \int_H f_+\mathrm{d}\mu - \int_H f_-\mathrm{d}\mu = \int_H f\mathrm{d}\mu.$$

Egyértelműség: az f μ-majdnem egyértelmű mindegyik cellán, tehát a megszámlálható sok cellan együtt is.

II.b eset: α komplex, σ-véges.

Külön-külön létezik és m. egyértelmű a valós és a képzetes rész Radon-Nikodym deriváltja.

III. eset: α nem σ-véges.

Feltehetjük, hogy $\alpha(X) = \infty$ (a másik eset a $-\infty$ lenne). Azt állítjuk, hogy X felbontható két részre: $X = S \cup V$ úgy, hogy S-en α σ-véges, a V részhalmazain pedig $\alpha(H) = \infty$ ha $\mu(H) > 0$.

A teret felcellázzuk μ-véges cellákra; vegyük észre, hogy az állításunkat elég egy cellára igazolni. Tehát azt is feltehetjük, hogy $\mu(X)$ véges.

Minden n-re legyen $\varphi_n = \alpha - n\cdot\mu$ előjeles mérték; a Hahn-felbontása legyen $X = P_n \cup N_n$. A definíció miatt $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$, így $P_{n+1} \subset P_n$ és $N_{n+1} \supset N_n$. Legyen $S = \bigcup N_n$ és $V = \bigcap P_n$.

Mivel $0 \geq \varphi(N_n) = \alpha(N_n) - n\cdot\mu(N_n)$, ezért $-\infty < \alpha(N_n) \leq n\cdot\mu(N_n) < \infty$ vagyis $\alpha(N_n)$ véges. Ezért α valóvan σ-véges N-en.

Ha $H \subset V = \bigcap P_n$ és $\mu(H) > 0$, akkor minden n-re $H \subset P_n$; akkor $\varphi_n(H) \geq 0$, $\alpha(H) \geq n\cdot\mu(H)$. Ez minden n-re igaz, tehát $\alpha(H) = \infty$.

Ezek után a Radon-Nikodym deriváltat előállíthatjuk a σ-véges S részen úgy mint eddig, és ezen a részen μ-majdnem egyértelmű, a V halmazon bármilyen pozitív értékű függvény megfelel, pl. konstans 1 vagy konstans 2 vagy konstans ∞.

9.10. megjegyzés. *Ha μ nem σ-véges, akkor nem biztos, hogy van Radon-Nikodym derivált. Például, ha $\mathbb{R}$ Borel-halmazain a Lebesgue-mértéknek nincs a számlálómértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja.*

9.11. tétel. *Legyenek $\alpha \ll \beta$ (pozitív) mértékek $(X, \mathcal{M})$-en, $g = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}$ és $f \in \mathcal{L}(\alpha)$. Ekkor*

$$\int_X f \mathrm{d}\alpha = \int_X f g \beta.$$

Bizonyítás. Egyszerű függvényre trivi, majd monoton konvergencia.

9.12. tétel. *Legyen $f \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$. Ekkor a $\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$ előjeles/komplex mérték totális variációja*

$$\tau(H) = \int_H |f| \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Trivi, hogy bármely $A \subset H$-ra

$$\big|\vartheta(A)\big| = \left|\int_A f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_A |f| \mathrm{d}\mu \leq \int_H |f| \mathrm{d}\mu.$$

A másik irányhoz vegyünk egy $n \geq 4$ egészt, és $k = 1, \ldots, n$ esetén legyen
$A_k = \left\{x \in H : \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \arg f(x) < \frac{2\pi k}{n}\right\}$.

$$\tau(H) \geq \sum_{k=1}^{n} \big|\vartheta(A_k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{A_k} f \mathrm{d}\mu\right| \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{2\pi k}{n}} \int_{A_k} f \mathrm{d}\mu\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{2\pi k}{n}} f\right) \mathrm{d}\mu \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \cos\frac{2\pi}{n} \mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f| \mathrm{d}\mu.$$

Így hát

$$\cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f| \mathrm{d}\mu \leq \tau(H) \leq \int_H |f| \mathrm{d}\mu,$$

és $n \to 0$-val kész.

9.13. tétel. *Ha ϑ komplex mérték $(X, \mathcal{M}$-en, és a totális variációja τ, akkor van olyan f függvény, amelyre $|f| = 1$ és*

$$\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\tau.$$

Bizonyítás. Legyen $g = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}$, avagy $\vartheta(H) = \int_H g \mathrm{d}\tau$. Az előző tétel szerint $\tau(H) = \int_H |g| \mathrm{d}\tau$, vagyis $\int_H (|g| - 1) \mathrm{d}\tau = 0$ minden H-ra, ami azt jelenti, hogy $|g| = 1$ τ-mm. Ahol g nem egységnyi, ott tetszés szerint megváltoztathatjuk...

9.14. definíció. *Előjeles/komplex mérték szerinti integrál: ha ϑ előjeles/komplex mérték és a totális variációja τ, akkor legyen*

$$\int_H f \mathrm{d}\vartheta := \int_H f \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau.$$

Alternatív definícó: Ha ϑ előjeles mérték és a variációi π, ν, akkor

$$\int_H f \mathrm{d}\vartheta := \int_H f \mathrm{d}\pi - \int_H f \mathrm{d}\nu.$$