An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. április 24., 18:38)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

10. Borel-mértékek differenciálása

Differenciálbázisok és a mérték szerinti deriváltak. A maximális függvény. A maximális függvény, azalsó és a felsőderivált mérhető. A maxiumális operátor tétele. Lokálisan véges mérték deriváltja csak nullmértékű halmazon lehet végtelen. Lebesgue-pontok. Lokálisan integrálható függvénynek m.m. pont Lebesgue-pontja. A Lebesgue-pontokban az $\int f\mathrm{d}\lambda$ mérték deriváltja, speciálisan az eloszlásfüggvény bármely reguláris bázis szerinti deriváltja egyenlő f-fel. Lokálisan véges, szinguláris mérték deriváltja m.m. nulla. A mértékek differenciálásának fő tétele.

10.1. definíció. *Differenciálbázis, reguláris, egyenletesen reguláris bázisok.*

10.2. definíció. *μ el[jeles Borel-mérték $\mathbb{R}^p$ egy részén, $\mathcal{B}$ differenciálbázis; a μ alsó és felső deriváltja az x pontban*

$$\underline{D_{\mathcal{B}}}\mu(x) = \lim_{r\to 0+} \sup\left\{\frac{\mu(A)}{\lambda(A)} : (x,A)\in\mathcal{B}, A\subset B(x,r)\right\},$$

illetve

$$\overline{D_{\mathcal{B}}}\mu(x) = \lim_{r\to 0+} \inf\left\{\frac{\mu(A)}{\lambda(A)} : (x,A)\in\mathcal{B}, A\subset B(x,r)\right\},$$

A $\mathcal{B}$ bázis differenciálja μ-t az x pontban, ha az alsó és a felső derivált egyenlő és véges. Ilyenkor $D_{\mathcal{B}}\mu(x)$-szel is jelöljük.

10.3. példa. *Szimmetrikus bázis: $\mathcal{B} = \{(x, B(x,r)) : r > 0\}$, ebből lesz a szimmetrikus derivált.*
Kockabázis: $\mathcal{B} = \{(x,Q) : Q \ni x$ tengelypárhuzamos, zárt kocka$\}$, ebből lesz a közönséges derivált.
Téglabáézis: $\mathcal{B} = \{(x,T) : T \ni x$ tengelypárhuzamos, zárt tégla$\}$, erős derivált.

10.4. lemma.

$$\overline{D}(\vartheta_1+\vartheta_2) \le \overline{D}\theta_1 + \overline{D}\theta_2$$
$$\underline{D}(\vartheta_1+\vartheta_2) \le \underline{D}\theta_1 + \underline{D}\theta_2$$

Ha ϑ_1 és ϑ_2 is differenciálható a $\mathcal{B}$ bázisban, akkor

$$D(\vartheta_1+\vartheta_2) =\le D\theta_1 + D\theta_2.$$

A maximális operátor tétele

10.5. definíció. *Legyen $\mathcal{B}$ differenciálbázis, ϑ előjeles vagy komplex Borel-mérték, a totális variációja τ, és legyen $0 < t \le \infty$. Ekkor*

$$M^t_{\mathcal{B}}\mu(x) = \sup\left\{\frac{\tau(A)}{\lambda(A)} : (x,A)\in\mathcal{B} : \mathrm{cl}\, A \subset B(x,t)\right\}.$$

Ha $t=\infty$, akkor a jelölésből elhagyhatjuk a t indexet: $M\mu$. Ha μ az f függvény integrálja, akkor írhatjuk azt is, hogy $M^t f$ vagy Mf.

Ha $\mu \ge 0$, akkor $\overline{D}\mu = \lim_{t\to 0+} M^t\mu$,
Triviális, hogy ha ϑ eljeles mérték, akkor $-M^t\mu \le \underline{D}\mu \le \overline{D}\mu \le M\mu$.

10.6. lemma. *Az $M^t\mu$ maximális függvény a.f.f. tehát Broerl-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $X \in H$ és $c < M^t\mu(x)$ tetszőlegesen.

Vegyünk egy olyan c_1-et, amelyre $c < c_1 < M^t\mu(x)$. Ehhez létezik olyan $A = B(x,r)$ úgy, hogy $r < t$ és $\dfrac{\tau(A)}{\lambda(A)} > c_1$.

Ha $\delta \le \frac{t-r}{2}$ és $y \in B(X,\delta)$, akkor $B(x,r) \subset B(y, r+\delta) \le B(x,t)$,

$$M^t\vartheta(y) \ge \frac{\tau(B(y,r+\delta))}{\lambda(B(y,r+\delta))} \ge \frac{\tau(B(x,r)}{\left(\frac{r+\delta}{r}\right)^p \lambda(B(x,r))} > \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^p c_1 > c,$$

az utolsó egyenlőtlenség akkor igaz, ha δ elég kicsi.

Tehát bármely $c < M^t\mu(x)$ esetén az x egy környezetében $c < M^t\mu$, vagyis az $M^t\mu$ függvény a.f.f.

10.7. lemma (A maximális operátor tétele)**.** *Ha ϑ előjeles vagy komplex mérték a $G \subset \mathbb{R}^p$ halmazon, akkor*

$$\lambda(M\vartheta > t) \le \frac{3^p\tau(G)}{t}.$$

Bizonyítás. Ha $K \subset G(M\vartheta > t)$ kompakt, akkor minden $x \in K$-hoz van olyan $r = r(x)$ sugár, amelyre $\frac{\tau(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} > t$. Ezek fedik K, közül-k kiválasztható egy véges fedés; ezt a sugarak szerint csökkenő sorrendbe tesszük, tehát vannak olyan $x_1, \dots, x_n \in K$ pontok és $r_1 \ge \dots \ge r_n > 0$ sugarak, avagy $B_k = NB(x_k, r_k)$ gömbök, amelyek fedik K-t.

A gömbök mindegikét sorban vagy kiválasztjuk, egy részét nem A B_1-et kiválasztjuk. A B_2-t akkor választjuk ki, ha nem metszi B_1-et. Ha a $B_1, \dots, B_{k-1}$ gömbökről már eldöntöttük, hogy kiváasztjuk-e: a B_k gömböt akkor választjuk ki, ha nem metszi egyik kiválasztott gömböt sem.

Legyenek a kiválasztott gömbök $B_{i_1}, \dots, B_{i_N}$; ezek páronként disjunktak. Azt állítjuk, hogy a 3-szorosra nagyított $B(x_{i_1}, 3r_{i_1}), \dots, (x_{i_N}, 3r_{i_N})$ gömbök lefedik K-t. Vegyünk egy tetszőleges $x \in K$ pontot; ezt valamelyik B_k gömb lefedi. Ha B_k kiválasztott gömb, akkor ennek 3-szoros nagyítása is fei x-et. Ha B_k nem kiválasztott, akkor belemetsz egy nála nem kisebb kiválasztott gömbbe: legyen ez B_j, és legyen y a B_k és B_j gömbök egy közös pontja. Ekkor $|x - x_j| \le |x - x_k| + |x_k - y| + |y - x_j| \le r_k + x_k + r_j \le 3r_j$, így $x \in B(x_j, 3r_j)$.

Ezek után

$$\lambda(K) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda(x_k, 3r_k) = 3^p \sum_{k=1}^{n} \lambda(x_k, r_k) < 3^p\tau(\mathbb{R}^p).$$

Ez minden K kompakt részhalmazra igaz, tehát a $G(M\vartheta > t)$ halm,azra is.

10.8. következmény. *Ha ϑ lokálisan véges, akkor $\underline{D}\mu$ és $\overline{D}\mu$ is λ-m.m. véges.*

Bizonyítás. $r > 0$ esetén legyen $\vartheta_R(H) = \vartheta(H \cap B(0,r))$; ez egy véges előjeles mérték; az $B(0,r)$ környezetben ϑ és ϑ_r alsós és felső deriváltja megegyezik.

Mivel $-M\vartheta \le \underline{D} \le \overline{D} \le M\vartheta$,

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_r| = \infty) \le \lambda(M\vartheta_r = \infty) \le \lambda(M\vartheta_r > t) \le \frac{3^p\vartheta_r(\mathbb{R}^p)}{t}.$$

Az $t \to \infty$ határátmenetből

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_r| = \infty) = 0.$$

Az r sugarú körön $\overline{D}\vartheta$ m.m. véges, tehát a teljes téren is.

Mértékek differenciálása

10.9. tétel. *Ha β lok. véges, szinguláris Borel-mérték, akkor $D\beta = 0$ λ-m.m.*

Bizonyítás. Komplex mérték esetén a valós és a képzetes részt külön-külön deriváljuk, ezért elég előjeles mértékekre bizonyítani.

Legyen τ a β totális varációja; ez is lok.véges Borel-mérték.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Legyen H a β egy Lebesgue-nullmértékű tartója. Az τ lok. véges Borel-mérték, tehát reguláris; van olyan $K \setminus H$ kompakt halmaz, amelyre $\tau(\mathbb{R}^p \setminus K) < \frac{1}{k}$.

Legyen $\vartheta(H) = \beta(H \setminus K)$; ekkor persze ϑ totális variációja $\vartheta(H \setminus K)$. A K komplementuma nyílt, ezen ϑ és β alsó és felső deriváltja ugyanaz, tehát $\overline{D}\vartheta = \overline{D}\beta$ és $\underline{D}\vartheta = \underline{D}\beta$ λ-m.m.

Ezek után

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > \frac{1}{m}\right) = \lambda\left(|\overline{D}\vartheta| > \frac{1}{m}\right) \leq \lambda\left(|M\vartheta| > \frac{1}{m}\right) \leq \frac{3^p\tau(\mathbb{R}^p \setminus K)}{1/m} < \frac{3^p m}{k}.$$

$k \to \infty$ majd $m \to \infty$,

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > \frac{1}{m}\right) = 0$$

$$\lambda\left(|\overline{D}\beta| > 0\right) = 0$$

Ugyanígy látható, hogy

$$\lambda\left(|\underline{D}\beta| > 0\right) = 0.$$

10.10. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$ vagy $f : H \to \mathbb{C}$ mérhető. Az $x_0 \in \operatorname{int} H$ pont az f függvénynek "Lebesgue/pontja", ha*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} = 0.$$

Trivi, hogy minden folytonossági pont Lebesgue-pont.

10.11. tétel. *Ha f lokálisan integrálható H-n, akkor H m.m. belső pontja Lebesgue-pontja H-nek.*

Bizonyítás. A H-t lefedhetjük olyan gömbökkel, amelyeken f integrálható, így elég integrálható f-re bizonyítani, vagyis $f \in L_1$ esetén.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Az L_1 térben sűrűn vannak az olyan "szép" függvények, amelyek véges sok téglalapon konstansok, azokon kívül az értékük 0. Legyen g eg yolyan szép függvény, amelyre $\|f - g\|_1 < \frac{1}{k}$, és legyen $h = f - g$; ekkor tehát $\|h\| < \frac{1}{k}$.

Ha egy x pont nem esik egyik téglalap határára sem, akkor x egy kis környezetében g konstans, és így

$$\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda = \int_{B(x,r)} |h - h(x_0)| \mathrm{d}\lambda \leq \int_{B(x,r)} \big(|h| + |h(x_0)|\big) \mathrm{d}\lambda,$$

$$\frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} \leq |h(x_0)| + \frac{\int_{B(x,r)} |f| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} \leq |h(x_0)| + Mh(x)$$

$$\limsup_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} \leq |h(x_0)| + Mh(x).$$

Ha az x pontban $\limsup_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} > \frac{1}{m}$, akkor ott $|h(x_0)|$ és $Mh(x)$ valamelyike legalább $\frac{1}{2m}$. Ezért

$$\lambda\left(\limsup_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} > \frac{1}{m}\right) \leq \lambda\left(|h| > \frac{1}{2m}\right) + \lambda\left(Mh > \frac{1}{2m}\right)$$

$$\leq\leq \frac{\int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/2m} + \frac{3^p \int |h| \mathrm{d}\lambda}{1/2m} = 2m(1 + 3^p)\|h\| < \frac{2m(1 + 3^p)}{k}.$$

Ebből $k \to \infty$, majd $m \to \infty$ határátmenettel

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+}, \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} > \frac{1}{m}\right) = 0,$$

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+}, \frac{\int_{B(x,r)} |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0,r))} > 0\right) = 0.$$

10.12. tétel (Mértékek differenciálásának fő tétele)**.** *$\mathcal{B}$ reguláris differenciálbázis, ϑ lok. véges előjeles vagy komplex mérték, a Lebesgue-felbontása $\vartheta = \int f\mathrm{d}\lambda + \beta$. Ekkor $D_{\mathcal{B}}\vartheta = f$ λ-m.m.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \int f\mathrm{d}\lambda$; megmutatjuk, hogy az f minden Lebesgue-pontjában $D\alpha = f$. Mivel $D\beta = 0$ m.m., ez elég is.

Legyen tehát x_0 Lebesgue-pont, és $0 < \rho = \rho(x_0) \le 1$ a differenciálbázis regularitásában szereplő arány. Ha $A \subset B(x_0, r)$ és $\lambda(A) > \rho \cdot \lambda(B(x_0, r))$, akkor

$$\left|\frac{\alpha(A)}{\lambda(A)} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_A (f - f(x_0))\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)}\right| \le \frac{\int_A |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)} \le \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\rho \cdot \lambda(B(x_0,r))} \to 0.$$

10.13. következmény. *Egy β lok. véges előjeles vagy komplex mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha $D\beta = 0$ λ-m.m.*

10.1. A sűrűségi tétel

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. (Petruska II, 20. fej.)

10.14. definíció. *$H \subset \mathbb{R}^p$-nek A mérhető burka, ha $A \in \mathcal{L}(R^p)$, $A \supset H$ és minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $B \subset H$-ra $\lambda(A \setminus B) = 0$, avagy, minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $H \subset B \subset A$-ra $\lambda(A \setminus B) = 0$.*

10.15. lemma. *1. Minden halmaznak létezik mérhető burka; még G_δ is.*

2. Ha M_1 és M_2 is mérhető burok, akkor $\lambda(M_1 \triangle M_2) = 0$.

3. Ha M mérhető burok és A mérhető, akkor $M \cap A$ mérhető burka $H \cap A$-nak.

10.16. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, a mérhető burka M, és tekintsük a $\mu(A) = \overline{\lambda}(A \cap H) = \lambda(A \cap M)$ mértéket. A H halmaz alsó és felső sűrűsége az $x \in \mathbb{R}^p$ pontban*

$$\overline{d}(x, H) = \overline{D}\mu(x) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

illetve

$$\underline{d}(x, H) = \underline{D}\mu(x) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

sűrűsége

$$d(x, H) = D\mu(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))}.$$

Az x a H-nak sűrűségi pontja, ha $d(x, H) = 1$.

10.17. tétel (Lebesgue-féle sűrűségi tétel)**.** *(a) m.m. $x \in H$ sűrűségi pont.*

(b) H akkor és csak akkor lebesgue-mérhető, ha m.m. $x \notin H$-ra $d(x, H) = 0$.

Bizonyítás. (a) Legyen M mérhető burka H-nak és $f = \chi_M$. Ekkor $\mu(A) = \lambda(A \cap M) = \int_A f\mathrm{d}\lambda$. Ezért $D\mu = \chi_M$ m.m.; speciálisan m.m.$x \in H \subset M$-re $D\mu(x) = 1$.

(b) Legyen N az $\mathbb{R}^p \setminus H$ mérhető burka, $\nu(A) = \lambda(A \cap N)$ és $g = \chi_n$.

Ha H mérhető, akkor lehet $M = H$ és $N = \mathbb{R}^p \setminus H$, és a két sűrűség is komplementere egymásnak.

Ha H nem mérhető, akkor $\lambda(M \cap N) > 0$. Ugyanis $\mathbb{R}^p \setminus N \subset H \subset M$, vagyis H két mérhető halmaz közé esik, ezek különbsége nem lehet nullmértékű. A különbség viszont éppen $M \cap N$. A metszet pontjaiban H sűrűsége 1 m.m.

11. Abszolút folytonos és szinguláris függvények

Abszolút folytonos és szinguláris függvények. Az abszolút folytonosság átfogalmazása ε, δ-val. Példa szigorúan monoton és folytonos, szinguláris függvényre. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és korlátos változás kapcsolata. Szinguláris függvény deriváltja m.m. 0. Abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a derivált integrálfüggvénye. Korlátos változású (spec. monoton) függvény m.m. differenciálható. (Petruska II, 22. fej.)

Most azzal fogunk játszani, hogy a Borel-mértékek differenciálásáról szóló tételeinket átírjuk az eloszlásfüggvényeikre.

Monoton növő függvények

11.1. definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, φ_F a megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték.*

f "abszolút folytonos", ha $\varphi_F \ll \lambda$.

f "szinguláris", ha $\varphi_F \perp \lambda$.

11.2. példa. *A Cantor-függvény folytonos, és szinguláris, nem abszolút folytonos.*

Végtelen sok szinguláris, folytonos mérték összegéből nyerhetünk szigorúan monoton, folytonos, szinguláris függvényt.

(Emlékeztetőül, az eloszlásfüggvény a 0 mértékű pontokban folytonos.)

11.3. tétel. *Minden monoton növő függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére. :-o*

11.4. tétel. *Ezek ekvivalensek:*

(1) F abszolút folytonos.

(2) Van olyan $f \geq 0$ mérhető függvény, aminek F integrálfüggvénye, és $f = F'$ m.m.

(3) Minden $[a, b] \subset I$ kompakt intervallumhoz és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely n és $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \ldots \leq x_n < y_n \leq b$, $\sum(y_i - x_i) < \delta$ esetén $\sum |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

11.5. tétel. *F Lipschitz $\Rightarrow$ F abszolút folytonos $\Rightarrow$ F folytonos.*

11.6. tétel. *F akkor és csak akkor szinguláris, ha $F' = 0$ m.m.*

11.7. tétel. *Ha F monoton, akkor m.m. differenciálható.*

11.8. lemma. *Ha F szinguláris és nem konstans, akkor van olyan pont, ahol $\overline{F'} = \infty$.*

11.9. tétel. *Ha F mindenhol differenciálható, akkor abszolút folytonos, és $F(b) - F(b) = \int_{[a,b]} F' \mathrm{d}\lambda$.*

Korlátos változású függvények

A korlátos változású függvényekre ezek könnyen kiterjeszthetőek. A továbbiakban F korlátos változású lesz.

11.10. következmény. *Ha F korlátos változású, akkor m.m. differenciálható.*

11.11. lemma. *Az $\alpha([a, b)) = F(b) - F(a)$ intervallumfüggvény kiterjeszthető előjeles Borel-mértékké.*

Bizonyítás. Az F felbomlik két montoton növekvő függvény különbségére. Ezekből egy-egy véges LS mértéket készíthetünk, ezek különbsége egy előjeles mérték, ami az F megváltozásának kiterjesztése.

11.12. definíció. *Legyen φ_F az F megváltozásából származó véges előjeles mérték, a variációi τ, π és ν, ezek egy-egy eloszlásfüggvénye F_τ, F_π, F_ν.*

Az F abszolút folytonos, ha $\varphi_F \ll \lambda$;

Az F szinguláris, ha $\varphi_F \perp \lambda$.

11.13. tétel. *Minden k.v. függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére. :-o*

11.14. tétel. *Ezek ekvivalensek:*

(1) F a.f.

(2) F_τ a.f.

(3) Van olyan $f \geq 0$ integrálható függvény, aminek F integrálfüggvénye, és $f = F'$ m.m.

(4) Minden $[a,b] \subset I$ kompakt intervallumhoz és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely n és $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \ldots \leq x_n < y_n \leq b$, $\sum(y_i - x_i) < \delta$ esetén $\sum |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

11.15. tétel. *F Lipschitz $\Rightarrow$ F abszolút folytonos $\Rightarrow$ F folytonos és korlátos változású.*

11.16. tétel. *F akkor és csak akkor szinguláris, ha $F' = 0$ m.m.*

11.17. tétel. *Ha F lok. k.v., mindenhol differenciálható, akkor abszolút folytonos, és $F(b) - F(b) = \int_{[a,b]} F' \mathrm{d}\lambda$.*