An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. május 1., 20:43)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

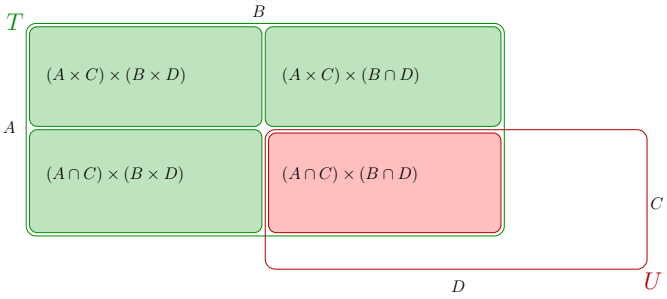
11. Szorzatmértékek

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel. Véges sok mértéktér szorzata. Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-additivitásra. (Petruska II, 23. fej.)

11.1. Véges sok mértéktér szorzata

11.1. lemma. *Legyen $(X,\mathcal{M},\mu)$ és $(Y,\mathcal{N},\nu)$ két mértéktér.*
(a) A $\mathcal{T}=\{A\times B : A\in\mathcal{M}, B\in\mathcal{N}\}$, a "téglák" hallmaza félgyűrű;
(b) A $\mathcal{T}$ félgyűrűn az $\alpha(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$ halmazfüggvény σ-additív, σ-szubadditív, és additív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\varnothing\in\mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége eláll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója; mindhárom triviális.



Az üres halmaz is tégla, például $\varnothing\times\varnothing\in\mathcal{T}$.

(b) Tegyük fel, hogy a $T=A\times B$ tégla felbomlik a $T_n=A_n\times B_n$ téglák $(n=1,2,\dots)$ diszjunkt uniójára. Ekkor $x\in X$, $y\in Y$ esetén

$$\chi_A(x)\ \chi_B(y)=\chi_T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{T_n}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\ \chi_{B_n}(y).$$

Előbb x, majd y szerint integrálva,

$$\mu(A)\ \chi_B(y)=\left(\int_X\chi_A(x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right)\chi_B(y)=\int_X\chi_A(x)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\mu(x)=$$

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\overset{\text{Beppo Levi}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\chi_{B_n}(y)$$

$$\alpha(T)=\mu(A)\ \nu(B)=\int_Y\mu(A)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\nu(y)=\int_Y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\ \chi_{B_n}(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)=$$

$$\overset{\text{Beppo Levi}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_Y\mu(A_n)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(T_n)$$

tehát α tényleg σ-additív (és persze additív is).

A σ-szubadditivitás következik abból, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű: a szokott módon minden fedés kicserélhető diszjunkt téglákkal való fedésre, és elmetszhető a lefedett téglával.

11.2. definíció. *Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = X \times Y$, a lemmabeli α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ az φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.*

A lemma és a definíció minden nehézség nélkül kiterjeszthető véges sok mérték szorzatára is.

11.3. definíció. *(véges sok mértéktér szorzata)*
Aa $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$ mértékterek, akkor $\mathcal{T} = \{A_1 \times \ldots \times A_n : A_1 \in \mathcal{M}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n\}$ a téglák félgyűrűje, ezen az $\alpha(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$ függvény σ-additív. A mértékterek szorzata $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$, ahol $Z = X_1 \times \ldots \times X_n$ halmazon, $\varphi_\alpha : Z \to [0, \infty]$ az α-hoz asszociált külső mérték, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ az φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

A σ-additivitásának bizonyítása ugyanúgy megy, mint a 11.1 lemmában, csak a Beppo Levi tételt nem kétszer, hanem k-szor kell alkalmazni.

11.4. példa. *Ha μ a p-dimenziós, ν a q-dimenziós Lebesgue-mérték, akkor a szorzat a $(p+q)$-dimenziós Lebesgue-mérték. Ez majdnem triviális, a valamelyik mérték szerint nullmértékű halmazokat kell egy kicsit diszkutálni: minden mérhető halmaz egy F_σ halmaz és egy nullmértékű halmaz uniója stb.*

11.2. A szorzatmérték szerinti integrál átírása többszörös integrállá

11.5. tétel (Fubini). *Legyen a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata, és f φ-m.mérhető Z-n. Ha f (végesen) integrálható, vagy ha Z σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor*
(a) μ-m.m. x-re létezik a $g(x) = \int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$ paraméteres integrál;
(b) $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$, avagy

$$\int_Z f(x,y) \mathrm{d}\varphi(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \ \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Bizonyítás. (Ld. [Petruska, 121–123. old.])

11.3. Akárhány mértéktér szorzata

Ha a fenti definíciót végtelen sok mértéktér szorzatára akarjuk átvinni, többféle nehézségbe ütközünk: biztosítanunk kell, hogy a tégláink mértékét kifejező — most már végtelen sok tényezős — szorzatok sorrendfüggetlenek legyenek; ráadásul végtelen sok σ-algebra direkt szorzata nem lesz félgyűrű. Az is előfordulhat, hogy megszámlálható soknál több mértékteret szeretnénk összeszorozni, mert éppen olyanunk van, hogy $2^{2^{\aleph_0}}$ független valószínűségi változót szeretnénk konstruálni.

Ezeknek a nehézségeknek egy lehetséges feloldása az, hogy csak valószínűségi mértéktereket szorzunk össze, amelyekben a teljes tér mértéke 1, ($[0, 1]$-beli számok végtelen szorzata már nem függ a sorrendtől), továbbá csak olyan téglákat használunk, amelyeknek véges sok kivétellel minden oldala a megfelelő teljes tér (hasonlóan például a topologikus terek szorzatához).

Egy következő állomás lehetne az olyan téglák megengedése, amelyeknek megszámlálható sok kivétellel minden oldala az egész tér, de az ilyenek úgyis benne lesznek a generált σ-algebrában.

Mostantól tehát legyen I tetszőleges számosságú, de azért nem üres indexhalmaz, és minden $i \in I$-re $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valószínűségi mértéktér.

A leendő szorzatmérték alaphalmaza az X_i halmazok szorzata, $Z = \times_{i \in I} X_i$ lesz. Ez tekinthető az olyan, I-n értelmezett függvények halmazának, amelyek minden I-hez X_i-beli pontot rendelnek. Ha $I = \mathbb{N}$, akkor a $Z = \times_{i \in I} X_i = \times_{i=1}^{\infty} X_i$ halmaz elemei végtelen sorozatok.

A téglák az olyan $T = \times_{i \in I} A_i$ "hengerhalmazok" lesznek, amelyekben minden $i \in I$-re $A_i \in \mathcal{M}_i$, és véges sok kivétellel $A_i = X_i$. Az A_i halmazt (így, egymás közt, nem hivatalosan) a T tégla i-edik "oldalának" fogjuk hívni.

A tégláink halmazát jelölje most is $\mathcal{T}$, tehát

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigtimes_{i \in I} A_i : \forall i \in I \ A_i \in \mathcal{M}_i, \text{ és } \{i \in I : A_i \neq X_i\} \text{ véges} \right\}.$$

A $T = \times_{i\in I} A_i$ téglához hozzárendeljük a

$$\alpha(T) = \prod_{i\in I} \mu_i(A_i)$$

számot. A szorzatban véges sok i kivételével minden tényező 1, így vehetjük csak az 1-nél kisebbek szorzatát, vagy a véges részszorzatok minimumát.

11.6. lemma. *(a) $\mathcal{T}$ félgyűrű.*
(b) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény additív.
(c) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény σ-szubadditív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\varnothing \in \mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége eláll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója.

Az üres halmaz is tégla, az egyik A_i-t választhatjuk $\varnothing$-nek.

Legyen $T = \times_{i\in I} A_i$ és $U = \times_{i\in I} B_i$ két tégla. Legyen $J \subset I$ az olyan indexek halmaza, amelyekre $A_i \neq X_i$ vagy $B_i \neq X_i$. Átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 11.3 definícióban. :-)

(b) Tegyük fel, hogy egy T tégla az $U_1, \dots, U_n$ téglák diszjunkt uniója. Legyen $J \subset I$ az olyan i indexek halmaza, amelyekre valamelyik téglánk i-edik oldala nem az egész tér; ez véges sok véges indexhalmaz uniója, vagyis J véges. Ismét csak átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \dots, N\}$ Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 11.3 definícióban. :-)

(c) Indirekt tegyük fel, hogy α nem σ-szubadditív, vagyis van olyan T tégla, ami lefedhető az $U^1, U^2, \dots$ téglák uniójával úgy, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T)$. Nyilván mindegyik U^n-et lecserélhetjük az $U^n \cap T$ téglával, így a fedés tovább csökken. Tehát feltehetjük, hogy $U^n \subset T$.

Az itt szereplő téglák oldalai összesen megszámlálható sok irányban lehetnek kisebbek, mint a megfelelő mértéktér; ezeket átindexelhetjük pozitív egészekkel. Az összes többi irányban minden szorzat minden tényezője 1. Tehát feltehetjük, hogy átindexelés után $I = \mathbb{N}$, a direkt szorzatok elemei sorozatok.

Legyen $T = \times_{i=1}^{\infty} A_i$ és minden n-re $U^n = \times_{i=1}^{\infty} B_i^n$. Mivel $U^n \subset T$, az is igaz, hogy minden i indexre $B_i^n \subset A_i$. Az indirekt feltevés szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T),$$

vagyis

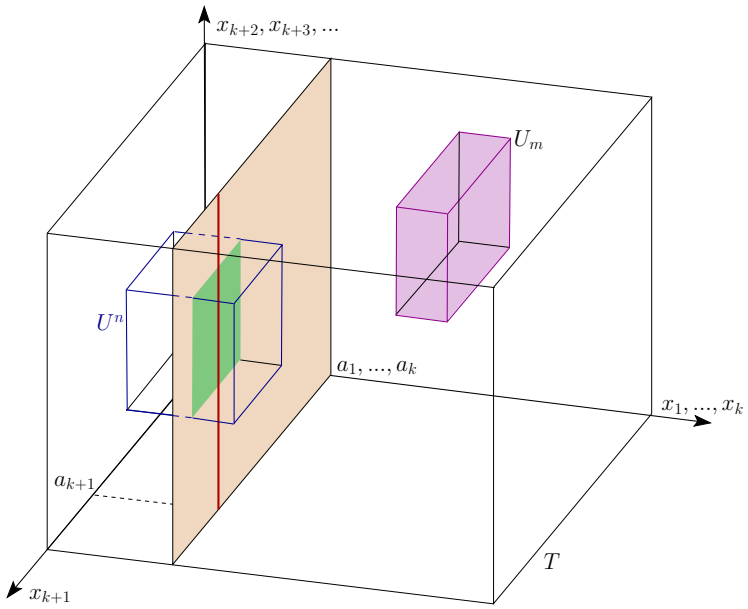
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i). \tag{1}$$

Rekurzívan konstruálunk egy olyan $t = (a_1, a_2, \dots) \in T$ pontot, ami a következőt fogja tudni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \quad \text{minden } k = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén.} \tag{2}$$

Ha $k = 0$, akkor az első produktum üres, ezt most is 1-nek definiáljuk.

A (2) szemléletes jelentése a következő. Vegyük az $x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$ hipersíkot, és az összes tégláink "nyomát" — metszetét a hipersíkkal. A baloldalon az első produktum értéke 0 vagy 1 attól függően, hogy az U^n tégla elmetszi-e a hipersíkot. A másik két produktum a hipersíkra eső vetületek módosított mértéke, amit érthetően az első k koordináta nélkül számolunk, ezért megy az index $(k+1)$-től. Az (2) formula tehát azt fejezi ki, hogy az U^n téglák nyomának összege a hipersíkon kisebb, mint a T tégla nyoma.



A $k = 0$ esetben (2) egybeesik (1)-gyel, tehát igaz.

Ha k pozitív egész, és $a_1, \ldots, a_{k-1}$ már megvan, akkor vizsgáljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right)$$

(vagyis (2) baloldalán az a_k helyére az x változót tettük). Olyan $a_k \in A_k$ pontra van szükségünk, amelyre $f(a_k) < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$.

Az A_k halmazon integrálva,

$$\int_{A_k} f(x) \mathrm{d}\mu_k(x) \overset{\text{B.L.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \mathrm{d}\mu_k(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \overset{(2)\ (k-1)\text{-re}}{<} \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(A_i) = \int_{A_k} \left(\prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \right) \mathrm{d}\mu_k(x).$$

Az f integrálja kisebb, tehát az A_k halmaz egy pozitív részén $f < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$; ebből a pozitív mértékű részből válasszunk egy a_k pontot.

Ezzel megkonstruáltuk a (2)-nak eleget tevő $t = (a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot.

Az indirekt feltevésünk szerint a t pontot fedi valamelyik U^m tégla, vagyis minden i-re $\chi_{B_i^m}(a_i) = 1$. Az U^m egy hengerhalmaz, tehát véges sok i index kivételével $B_i^m = X_i$, ezért elég nagy k esetén

$$1 = \prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^m}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^m) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \overset{(2)}{<} \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \leqslant 1,$$

ellentmondás. Tehát α tényleg σ-szubadditív.

11.7. definíció. *Az $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valószínűségi mértékterek ($i \in I$) szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = \times_{i \in I} X_i$, φ_α az α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ az φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.*