Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)

2017/2018, II. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem. A felkészülési időben az íróeszközökön kívül egy A4-es lap, saját kézzel írt jegyzet használható.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018tavasz-an4/an4-sillabusz.pdf

A tételjegyzék pedig innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018tavasz-an4/an4-teteljegyzek.pdf

Részletes tételjegyzék

1. A Green-tétel

Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék. Görbeindex. Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Jordan-tartomány. Egyszerű zárt görbe irányítása. Skalármezők és vektormezők. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). Jordan-tartomány területe vonalintegrál alakban. Rotációmentes vektormező vonalintegrálja Jordan-tartomány határán. Kiterjesztés több görbével határolt tartományokra. [LTS2, 200–205. o.]

2. Integráltételek síkban

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). A divergencia nem függ a koordináta-tengelyek irányától. Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. A rotáció nem függ a koordináta-tengelyek irányától. Stokes-tétel 2-dimenzióban. [LTS2, 205–210. o.]

3. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafiokon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció. A rotáció független a koordináta-rendszertől. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.) [LTS2, 211–221. o.]

4. Mérhető terek és mértékek

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-en.

Halmazrendszerek, megszorítás. Halmazalgebra, gyűrű, modulus, félgyűrű, σ-algebra, σ-gyűrű. Generált struktúrák. Borel-halmazok top. terekben. Mérhető tér. Halmazfüggvények. Monoton, additív σ-additív és σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, akkor $\mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$. Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $\mu(A_1) < \infty$, akkor $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$. [Petruska, 51–52. o.]

5. A Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt. [Petruska, 69–70, 81–82. o.]

6. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származtó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. [Petruska, 61–63. o.]

7. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. [Petruska, 64–66. o.]

8. Lebesgue-Stieltjes mértékek

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték eloszlásfüggvénye. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek. Kiterjesztés véges dimenzióban. Addititív téglafüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték véges dimenzióban. [Petruska, 69–72. o.]

9. A Lebesgue-Stieltjes mértékek regularitási tulajdonságai

Mérhető halmazok "távolsága". Minden Lebesgue-mérhető halmazhoz van tetszőleges közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója. Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. [Petruska, 72–73. o.]

10. Nemnegatív függvények integrálja

Mérhető függvények. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció). Egyszerű függvények. Nemnegatív mérhető függvény mint egyszerű függvények monoton növő limesze. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek. [Petruska, 53–57. o.]

11. Függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétele. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Fatou-lemma. Előjeles és komplex függvények integrálása. Az L_1 tér. Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Teljes mértéktér. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m. [Petruska, 57–60. o.]

12. Riemann- és Lebesgue-Stieltjes integrálok

Alsó és felső burkoló. A burkoló függvények félig folytonosak, ezért Borel-mérhetők. Kapcsolat az alsó és felső Stieltjes integrállal. A Riemann-Stieltjes integrál létezésének feltétele. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele. [Petruska, 76–80. o.]

13. Előjeles mértékek és variációik

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt. Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. [Petruska, 85–89. o.]

14. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség. [Petruska, 90–91. o.]

15. Radon-Nikodym derivált

Radon-Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói. [Petruska, 91–95. o.]

16. A maximális operátor

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Szimmetrikus, közönséges és erős derivált. Maximális operátor. A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. [Petruska, 97–99. o.]

17. Borel-mértékek differenciálása

Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0. Lebesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon-Nikodym deriválttal. (Petruska II, 19. fej.) [Petruska, 100–103. o.]

18. Sűrűségi tétel. Abszolút folytonos és szinguláris függvények

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. [Petruska, 104–105. o.]

Abszolút folytonos és szinguláris monoton függvények. Az abszolút folytonosság átfogalmazása ε, δ-val. Cantor-függvény. Konstrukció szigorúan monoton, folytonos, szinguláris függvényre. Szinguláris függvény deriváltja m.m. 0. Abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a deriváltjának az integrálfüggvénye. Monoton függvény m.m. differenciálható. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és korlátos változás kapcsolata. Korlátos változású függvény m.m. differenciálható.

19. Mértékterek szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata. Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata (bizonyítás a σ-szubadditivitásra). [Petruska, 121, 124–126. o.]

20. A Fubini-tétel

[Petruska, 121–123. o.]

21. L_p-terek

L_p-normák. L_p és ℓ_p terek. Konjugált kitevők, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Félmetrikus terek. Faktorizálás a m.m. 0 függvények terével. L_p-terek. Sűrű alterek (egyszerű, szép, kompakt tartójú folytonos függvények alterei). Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$. Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.) [Petruska, 127–130. o.]

22. L_2-terek.

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. Az ortonormált polinomok és trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Schauder-bázis. Az $L_2([a,b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel.

23. Mértékben való konvergencia.

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség. [Petruska, 135–137. o.]

24. Konvolúció és Fourier-transzformált.

L_1-beli függvények konvolúciója. L_1 mint kommutatív Banach-algebra. [Petruska, 138. o.] L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja. Fourier-Stieltjes transzformált.

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.