3. Valós analízis gyakorlat, 2020. szeptember 15.

3.1. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{és} \quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.2. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségek mintájára (duplázás és lefelé lépkedés) bizonyítsuk be a négyzetes és köbös közepek közötti egyenlőtlenséget: ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, akkor

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \leq \sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{n}},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3.3. Alkalmas számok számtani és mértani közepei segítségével határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet x^2y, ha $x, y \geq 0$ és (a) $2x+y=10$; (b) $x+3y=10$.

3.4. Milyen nagy térfogatú hengert lehet beleírni az egységnyi sugarú gömbbe?

3.5. Mutassunk példát olyan N_0 számra, amellyel bármely $n > N_0$ egész esetén $1.01^{\sqrt{n}} > n$.

Házi feladatok

3.6. Milyen nagy térfogatú egyenes körkúpot lehet beleírni egy egységnyi sugarú gömbbe?

3.7. Legyen $r = \frac{p}{q}$ racionális szám, és $x \geq -1$. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $0 < r < 1$, akkor $(1+x)^r \leq 1+rx$; (b) ha $r > 1$, akkor $(1+x)^r \geq 1+rx$.

Írjunk fel számtani és mértani közepeket úgy, hogy éppen ezeket az egyenlőtlenségeket kapjuk.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető okt. 4. éjfélig

PM3.1. Igazoljuk, hogy $x > 0$ esetén

$$\frac{\binom{n}{0}}{x} - \frac{\binom{n}{1}}{x+1} + \frac{\binom{n}{2}}{x+2} - \frac{\binom{n}{3}}{x+3} + - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{x+n} > 0.$$