6. Valós analízis gyakorlat, 2020. szeptember 23.

6.1. (a) A különlegesen kiképzett J. English ügynök, aki a fülével tud ölni, és szabad idejében az eliminátumait szokta számolgatni, csak az ehhez szükséges természetes számokat és az összeadást ismeri. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(b) A mesterséges intelligenciával felvértezett kínai szőkenő-robot az egész számokat és az összeadást ismeri. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(c) Az Io-lakó (Az Io a Jupiter egyik holdja) számára a valós számok a $\{I, O\}$ halmazból állnak, és a modulo 2 összeadást ismeri: $O \oplus O = O$, $O \oplus I = I$, $I \oplus O = I$, és $I \oplus I = O$. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában? Definiálható-e számára szorzás úgy, hogy teljesüljenek a testaxiómák? Teljesíthetők-e a rendezési axiómák?

(d) A komplex számokra, mely test axiómák teljesülnek? Megadható-e a rendezési axiómáknak eleget tevő rendezés?

6.2. Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.

Ha $ab = 0$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$; $\quad -(-a) = a$; $\quad (a-b)-c = a-(b+c)$; $\quad -a = (-1)\cdot a$; $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$.

6.3. Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

6.4. Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.

R1'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.

R2'. x akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.

R3'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.

R4'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.

Ezek után a $<$ relációt definiáljuk a következőképppen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív.

Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

Házi feladatok

6.5. Ellenőrizzük, hogy a valós számok halmazán az $a \oplus b = a + b + 1$ művelet kielégíti az első négy axiómát. Mi lesz a nullelem? Adjunk meg olyan „szorzást”, $a \odot b$-t, amellyel együtt testet kapunk.

6.6. Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.

$(-a) \cdot b = -(ab)$; $\quad 1/(a/b) = b/a$; $\quad (a - b) + c = a - (b - c)$.

6.7. Legyen F test, és $F[x]$ az F feletti polinomok gyűrűje. A polinomokból készített $a(x)/b(x)$ és $c(x)/d(x)$ formális törteket nevezzük ekvivalensnek (jelben $a/b \sim c/d$, ha $a(x)d(x) = b(x)d(x)$.

(a) Mutassuk meg, hogy a $\sim$ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz $a \sim a$, $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ és $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)$. Igazoljuk, hogy a formális törtek halmaza diszjunkt halmazokra (ekvivalencia-osztályokra) bontható úgy, hogy két tört akkor és csak akkor van ugyanabban az ekvivalencia-osztályban, ha ekvivalensek.

A törtek ekvivalencia-osztályait nevezzük F feletti racionális tört függvényeknek.

(b) Mi legyen két racionális tört összege, illetve szorzata?

(c) Igazoljuk, hogy a racionális törtek testet alkotnak. (A jele: $F(x)$.)

Beadandó házi feladatok

A Teamsben feltöltendő vasárnap (szept. 27.) éjfélig

BE6.1. (a) Ellenőrizd, hogy a pozitív racionális számok halmazán az $a +_Q b = a \cdot b$ művelet kielégíti az első négy axiómát. Mi lesz a nullelem?

(b) Bizonyítsd be, hogy *nincs* olyan szorzás, amellyel együtt testet kapunk.

BE6.2. Egy $a(x)/b(x)$ formális törtet pozitívnak vagy negatívnak nevezünk, ha a és b főegyütthatója azonos, illetve ellentétes előjelű. Mutassuk meg, hogy a valós együtthatós törtek testében tejesülnek az R1', R2', R3', R4' módosított rendezési axiómák.