9. Valós analízis gyakorlat, 2020. október 7.

9.1. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall a \in H \quad \exists r > 0 \quad (a-r, a+r) \subset H$. Melyik nyílt az alábbi halmazok közül?

$$\emptyset \qquad \mathbb{R} \qquad (a,b) \qquad [a,b] \qquad (1,2) \cup (3,4) \qquad [1,2] \cup [3,4] \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

9.2. Bizonyítsuk be Borel fedési tételét: Ha K korlátos, zárt intervallum, és I_α ($\alpha \in A$) nyílt halmazoknak egy olyan rendszere, ami *lefedi* K*-t*, azaz $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$, akkor van olyan véges $V \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in V} I_\alpha$. Más szóval, K minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

1. segítség: indirekt tegyük fel, hogy semelyik véges sok I_α nem fedi K-t, és felezgessük K-t.
2. segítség: mik lehetnének az egerek és az elefántok?

9.3. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *sehol sem sűrű, s.s.s.*, ha $\forall a < b \left(\exists c, d \in \mathbb{R} \left(a < c < d < b \wedge H \cap (c,d) = \emptyset\right)\right)$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ nem tartalmaz intervallumot.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $G_1, G_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ sűrű nyílt halmazok, akkor $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ is sűrű. (Baire féle kategóriatétel)

9.4. Mutassunk a racionális törtek rendezett testében olyan nemüres, felülről korlátos halmazt, amelynek nincs legkisebb felső korlátja.

9.5. Legyen $(R, <)$ egy nemüres rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy trichotóm és tranzitív kétváltozós $<$ reláció). Ebben a halmazban a szokásos módon definiáljuk az (a,b), $[a,\infty)$, $\emptyset$ stb. intervallumokat. Egy $K \subset R$ halmazt nevezzünk *konvex*nek, ha minden $a, b \in K$, $a < b$ esetén $[a,b] \subset K$.

(a) Mutassuk meg, hogy minden intervallum konvex.

(b) Mutassuk meg, hogy a $(\mathbb{Z}, <)$ halmazban minden konvex halmaz intervallum.

(c) Mutassuk példát a $(\mathbb{Q}, <)$ halmazban olyan konvex halmazra, ami nem intervallum.

(d) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$-ben minden konvex halmaz intervallum.

(e) Mutassuk példát a racionális tört függvények rendezett testében olyan konvex halmazra, ami nem intervallum.

Házi feladatok

9.6. Igazoljuk a $\sqrt[k]{a}$ létezését $\mathbb{R}$-ben

(a) a Helly-tétellel (vegyük az összes olyan korlátos intervallumot, amelynek alsó végpontja egér, felső végpontja elefánt);

(b) Borel fedési tételéből (lefednek-e az $(0, e)$ és (E, ∞) alakú intervallumok egy bizonyos $[e_0, E_0]$ intervallumot?);

(c) abból, hogy az $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0,\ x^k \leq a\}$ halmaz konvex, tehát intervallum.

9.7. Legyen $(R, <)$ egy nemüres rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy trichotóm és tranzitív kétváltozós $<$ reláció). Egy $H \subset R$ halmazt nevezzünk *nyíltnak*, ha minden $x \in H$-hoz létezik olyan I nyílt intervallum, amire $x \in I \subset H$. (Az I intervallum lehet végtelen is.)

Keressünk a következő állítások között ekvivalenseket. Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ stb. implikációk közül minél többre, illetve mutassunk ellenpéldát azokban az esetekben, amikor az implikáció nem igaz.

(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja.

(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

(c) R-ben igaz a teljességi axióma.

(d) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

(e) R minden konvex részhalmaza összefüggő. (Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *összefüggő*, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazok esetén, anelyekre $H \subset (A \cup B)$ és $A \cap B \cap H = \emptyset$, az is igaz, hogy $H \subset A$ vagy $H \subset B$). Egyhalmaz *nyílt*, ha nyílt intervallumok, nyílt félegyenesek netán az egész R uniója.)

(f) R minden intervalluma összefüggő.

(g) R összefüggő.

(h) R minden konvex részhalmaza intervallum.

(i) R-ben igaz Borel fedési tétele.

Beadandó házi feladatok

A Teamsben feltöltendő vasárnap (okt. 11.) éjfélig

BE9.1. Igazoljuk a $\sqrt[k]{a}$ létezését $\mathbb{R}$-ben

(a) intervallumfelezéssel;

(b) az egerek szuprémumával és a elefántok infimumával.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető okt. 25. éjfélig

PM9.1. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén. (IMO 1985/6)

PM9.2. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a testben igaz a legkisebb felső korlát tétele.