10. Valós analízis gyakorlat, 2020. október 13.

10.1. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $K = 10^6$-hoz, illetve $K = -10^6$-hoz.

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}; \qquad n^2 - n^3; \qquad n\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big); \qquad \sin n$$

10.2. Mutassunk példát olyan divergens a_n sorozatra, amelyre $a_{n+1} - a_n \to 0$.

10.3. Mutassuk meg, hogy bármely (c_n) számsorozathoz találhatók olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, és $a_n \cdot b_n = c_n$.

10.4. Mutassuk meg, hogy ha $\forall n \geq n_0$-ra $a_n \leq b_n$ és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$.

10.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to \infty$.

Házi feladatok

10.6. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $K = 10^6$-hoz, illetve $K = -10^6$-hoz.

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n}; \qquad \sqrt{n+1} - n$$

10.7. Mutassunk példákat olyan (a_n) és (b_n) sorozatokra, amelyekre
(a) $a_n - b_n \to 0$, de a_n/b_n nem tart 1-hez;
(b) $a_n/b_n \to 1$, de $a_n - b_n$ nem tart 0-hoz.

10.8. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \geq 0$, és $a_n \to a$, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető okt. 25. éjfélig

PM10.1. Azt mondjuk, hogy az $A = (a_1, a_2, \ldots)$ pozitív számokból álló sorozat nagyságrendje nagyobb, mint a $B = (b_1, b_2, \ldots)$ pozitív számokból álló sorozaté, ha $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$. Ennek jelölése lehet pl. $A \gg B$, $(a_n) \gg (b_n)$ vagy $a_n \gg b_n$.

(a) Legyen $A^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots), A^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots), A^{(3)} = (a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots), \ldots$ pozitív számokból álló sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan, szintén végtelenhez tartó C sorozat, amelynel nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $A^{(i)}$ sorozat nagyságrendje.

(b) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ végtelenhez tartó sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan, szintén végtelenhez tartó C sorozat, amelyre $\forall i\ C \ll A^{(i)}$.

(c) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$, illetve $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \ldots$ pozitív számokból álló sorozatok egy-egy sorozata úgy, hogy $\forall i, j\ A^{(i)} \ll B^{(j)}$. Igazoljuk, hogy létezik olyan C sorozat, amelyre $\forall i, j\ A^{(i)} \ll C \ll B^{(j)}$.