14. Valós analízis gyakorlat, 2020. november 3.

14.1. Mik az alábbi sorozatok torlódási pontjai? Mi a limesz superioruk és limesz inferioruk?

$$a_n = n; \quad b_n = (-1)^n; \quad c_n = \left\{\sqrt{2} \cdot n\right\}$$

14.2. Bizonyítsd be, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont, avagy, ha c torlódási pontja a (b_k) számsorozatnak, és (b_n) minden eleme torlódási pontja az (a_n) sorozatnak, akkor c torlódási pontja (a_n)-nek.

14.3. (a) Igazoljuk, hogy ha $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ valós számsorozatok, és $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \leq b_n$, akkor

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{és} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

(b) Igazoljuk, hogy ha $\limsup a_n < \liminf b_n$, akkor $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n < b_n$.
(c) Igaz-e, hogy ha $\limsup a_n \leq \liminf b_n$, akkor $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n < b_n$?

14.4. Mutassuk meg, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

14.5. (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatra

$$\liminf \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \liminf a_n \quad \text{és} \quad \limsup \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \limsup a_n.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim a_n.$$

Házi feladatok

14.6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to b$.

14.7. Legyen $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ két, nemnegatív számokból álló sorozat. Rakjuk sorba nagyság szerint:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}(a_n + b_n); \quad \overline{\lim}(a_n + b_n)$$

Mutssunk példát, amikor ezek mind különbözők.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető nov. 22. éjfélig

PM14.1. Konstruálj olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ami minden intervallumban minden valós értéket felvesz.