17. Valós analízis gyakorlat, 2020. november 11.

17.1. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex, de nem szigorúan konvex, akkor van olyan nem elfajuló intervallum, ahol lineáris.

17.2. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, és $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$?

17.3. Milyen függvények konvexitásával ekvivalensek a súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségek?

17.4. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex és $a < c < d < b$, akkor $[c, d]$-n f Lipschitz-tulajdonságú, azaz van olyan $K \geq 0$ szám, hogy bármely $x, y \in [c, d]$ esetén $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Házi feladatok

17.5. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és konvex, akkor f^{-1} konkáv az $(\inf f, \sup f)$ intervallumon.

17.6. Mi a kapcsolat a Bernoulli- és a Jensen-egyenlőtlenség között?

Beadandó házi feladat

A Teamsben feltöltendő vasárnap (nov. 15.) éjfélig

BE17.1. Bizonyítsuk be, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[k]{x}$ szigorúan konkáv $[0, \infty)$-ben.

BE17.2. (a) Igazoljuk, hogy ha $A, B, C \subset \mathbb{R}$ intervallumok, $g : A \to B$ és $f : B \to C$ is konvex, továbbá f nonoton nő, akkor $f \circ g$ is konvex.

(b) Igaz-e, hogy konvex függvények kompozíciója is konvex?

(c) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x = y^2 + y; \qquad y = (2^{x+1} - 5)/3.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető nov. 29. éjfélig

PM17.1. (a) Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ gyengén konvex és felülről korlátos, akkor konvex. ($f : I \to \mathbb{R}$ gyengén konvex, ha $\forall x, y \in \; f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.)

(b) Igaz-e, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ gyengén konvex és alulról korlátos, akkor konvex?