# 19. Valós analízis gyakorlat, 2020. november 18.

**19.1.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} =? \qquad \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} =? \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} =?$$

**19.2.** Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó $\delta$-t, vagy olyan $\varepsilon$-t, amihez nincs $\delta$.

a) $f(x) = x^3$, $a = 0$; b) $f(x) = \{x\}$, $a = 3$;

**19.3.** Az $f$ függvény "Lipschitz tulajdonságú", ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in D(f)\ \ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. Bizonyítsuk be, hogy ha $f$ Lipschitz egy nyílt intervallumban, akkor ott folytonos is.

**19.4.** Bizonyítsuk be, hogy ha $f$ Lipschitz tulajdonságú az $(0, 1)$ intervallumban, akkor $\lim\limits_{+0} f$ létezik és véges. (Használjuk a Cauchy-kritériumot.)

**19.5.** Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ határértéket, ha (a) $\alpha$ pozitív egész; (b) $\alpha$ pozitív racionális; (c) $\alpha = \sqrt{2}$.

## Házi feladatok

**19.6.**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\sqrt{2}}-1}{x^{\pi}-1} =? \qquad \lim_{x\to 1} \left( \frac{a}{x^a-1} - \frac{b}{x^b-1} \right) =?$$

**19.7.** Bizonyítsd be, hogy ha $f : (0, 1) \to (0, \infty)$, és minden $x, y$-ra $f(x) < (1 + y)f(y)$, akkor $f$-nek véges jobboldali határértéke van a 0-ban.

**19.8.** Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, akkor $f$ azonosan 0.

## Beadandó házi feladat

A Teamsben feltöltendő vasárnap (nov. 22.) éjfélig

**BE19.1.** Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó $\delta$-t, vagy olyan $\varepsilon$-t, amihez nincs $\delta$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = \dfrac{1}{25}$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $a = 4$.

**BE19.2.**

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} =?$$

## Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A Teamsben feltölthető dec. 6. éjfélig

**PM19.1.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és tetszőleges $a > 0$ esetén $f(n \cdot a) \to 0$. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\infty} f = 0$.