23. Valós analízis gyakorlat, 2020. december 2.

23.1. Igazoljuk, hogy a $[0, \pi]$ intervallumban a $\sin x$ függvény szigorúan konkáv.

23.2. Igazoljuk, hogy bármely $a > 0$, $a \neq 1$ számra az a^x függvény gyengén szigorúan konvex és folytonos, tehát szigorúan konvex.

23.3. Általánosítsuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget tetszőleges (pozitív és negatív) kitevőkre.

23.4. (a) Igazoljuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\sin x < x$.
(b) Igazoljuk, hogy $0 < x < 1$ esetén $\sin x > x - 1 + \sqrt{1 - x^2}$.
(c) Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

23.5. Bizonyítsuk be, hogy minden nemnegatív egész n-hez léteznek olyan, n-edfokú $T_n(x)$ és $U_n(x)$ polinomok, amelyekre

$$T_n(\cos t) = \cos nt, \quad \text{illetve} \quad U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t},$$

továbbá

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{és} \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

(Ezek az úgynevezett első- és másodfajú Csebisev-polinomok.)

Házi feladatok

23.6. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f exponenciális függvény.

23.7. Egy legfeljebb n-edfokú p polinomra tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén $|p(x)| \leq 1$. Igazoljuk, hogy $x > 1$ esetén $|p(x)| \leq T_n(x)$.

Beadandó házi feladatok

A Teamsben feltöltendő vasárnap (dec. 6.) éjfélig

23.8. Igazoljuk, hogy a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $\operatorname{tg} x$ függvény szigorúan konvex.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

A Teamsben feltölthető dec. 20. éjfélig

PM23.1. A nemnegatív x, y számokra $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$. Igazoljuk, hogy $x^3 + y^3 \leq 2$.

PM23.2. Igaz-e, hogy ha f alulról korlátos és gyengén konvex, akkor konvex?