24. Valós analízis gyakorlat, 2020. december 8.

24.1. Konvergens? Divergens? Feltételesen konvergens? Abszolút konvergens? Alkalmazható-e a gyök- vagy a hányados-kritérium?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+\sqrt{n}+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10n+\sqrt{n}+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n-2^n}$$

24.2. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorokra.

24.3. *Végtelen táblázaton* egy $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ rendszert (ha tetszik, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt) értünk. A táblázat egy *bejárásán* azt értjük, hogy a táblázat elemeit valamilyen sorrendben sorozatba rendezzük.

(a) Mutassuk példát olyan végtelen táblázatra, amelyben minden sor összege konvergens, minden oszlop összege konvergens, továbbá a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege is konvergens, de különböző.

(b) Mutassuk meg, hogy ha a táblázatban minden szám nemnegatív, akkor bármilyen bejárásban az elemek összege ugyanaz; továbbá a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege is ugyanez a szám. (Hogyan lehetne még ezt a számot definiálni?)

24.4. Igazoljuk az $a_{ij} = x^{i+j}$ $(i, j \geq 0)$ végtelen táblázat segítségével, hogy $0 < x < 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

24.5. Milyen x értékekre konvergens?

$$\sum e^{-n^2 x} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\binom{2n}{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

A Teamsben feltölthető dec. 20. éjfélig

PM24.1. Legyen (a_n) és (r_n) két olyan számsorozat, amikre az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ sorozat korlátos, r_n monoton fogy, és $r_n \to 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum a_n r_n$ konvergens. (Dirichlet-kritérium)