Komplex Függvénytan, 17–18. előadás

Törtlineáris függvények
Az egységkörlemez konform automorfizusai

2020. nov. 16.

17. Törtlineáris függvények

Mese

A következő néhány előadáson azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen egyszeresen összefüggő tartományok között létezik konform megfeleltetés, vagyis oda-vissza holomorf bijekció.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad \neq bc)$$

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk törtlineáris függvénynek vagy lineáris törtfüggvénynek vagy Möbius-transzformációnak.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk törtlineáris függvénynek vagy lineáris törtfüggvénynek vagy Möbius-transzformációnak.

- Ha a Riemann-gömböt (a komplex projektív egyenest) homogén koordinátákkal koordinátázzuk, akkor az $\frac{az+b}{cz+d}$ függvénynek megfelel a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való balról szorzás.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk törtlineáris függvénynek vagy lineáris törtfüggvénynek vagy Möbius-transzformációnak.

- Ha a Riemann-gömböt (a komplex projektív egyenest) homogén koordinátákkal koordinátázzuk, akkor az $\frac{az+b}{cz+d}$ függvénynek megfelel a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való balról szorzás.
- Ha $c \neq 0$, akkor $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ (a nevező 0) és $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk törtlineáris függvénynek vagy lineáris törtfüggvénynek vagy Möbius-transzformációnak.

- Ha a Riemann-gömböt (a komplex projektív egyenest) homogén koordinátákkal koordinátázzuk, akkor az $\frac{az+b}{cz+d}$ függvénynek megfelel a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való balról szorzás.
- Ha $c \neq 0$, akkor $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ (a nevező 0) és $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Ha $c = 0$, akkor $f(\infty) = \infty$.

Trivialitások

Trivialitások

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.

Trivialitások

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.
- Ha $f(z)$ és $g(z)$ törtlineáris függvények, egy-egy mátrix alakjuk F, illetve G, akkor $f \circ g$ mátrix alakja $F \cdot G$.

Trivialitások

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.
- Ha $f(z)$ és $g(z)$ törtlineáris függvények, egy-egy mátrix alakjuk F, illetve G, akkor $f \circ g$ mátrix alakja $F \cdot G$.
- Ha $f(z)$ törtlineáris függvény, egy mátrix alakja $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $f^{-1}(z)$ mátrix alakja $F^{-1} \sim \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Trivialitások

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.
- Ha $f(z)$ és $g(z)$ törtlineáris függvények, egy-egy mátrix alakjuk F, illetve G, akkor $f \circ g$ mátrix alakja $F \cdot G$.
- Ha $f(z)$ törtlineáris függvény, egy mátrix alakja $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $f^{-1}(z)$ mátrix alakja $F^{-1} \sim \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.
- A törtlineáris függvények csoportja a $PGL(2, \mathbb{C})$ csoport.

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Mindent törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Mindent törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Biz. (a) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Mindent törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Biz. (a) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Ha $c \neq 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{cz+d} \cdot \frac{bc-ad}{c} + \frac{a}{c}.$$

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Mindent törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Biz. (a) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Ha $c \neq 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{cz+d} \cdot \frac{bc-ad}{c} + \frac{a}{c}.$$

(b) A generátorelemek, tehát az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$ is bijekciók a Riemann-gömbről önmagára.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$;

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$;

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$;

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$; ezek után $f = h^{-1} \circ g$ megfelelő.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$; ezek után $f = h^{-1} \circ g$ megfelelő.
Az egyértelműség: Vizsgáljuk a $h \circ f$ függvényt: $h(f(z_1)) = 0$, $h(f(z_2)) = \infty$ és $h(f(z_3)) = 1$,

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Biz. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}$; $K = z_3 - z_2$.

1c. Ha $z_2 = \infty$: $f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}$; $K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}$.

1d. Ha $z_3 = \infty$: $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$; ezek után $f = h^{-1} \circ g$ megfelelő.
Az egyértelműség: Vizsgáljuk a $h \circ f$ függvényt: $h(f(z_1)) = 0$, $h(f(z_2)) = \infty$ és $h(f(z_3)) = 1$, tehát csak $h \circ f = g$ lehet, vagyis $f = h^{-1} \circ g$.

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a}, \quad (a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a}, \quad (a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

Tétel

Bármely négy különböző pont, a, b, c, d akkor és csak akkor van egy körön vagy egy egyenesen, ha $\mathrm{Im}(a, b; c, d) = 0$.

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a}, \quad (a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

Tétel

Bármely négy különböző pont, a, b, c, d akkor és csak akkor van egy körön vagy egy egyenesen, ha $\mathrm{Im}(a, b; c, d) = 0$.
(”köregyenes”: kör vagy egyenes. Az ”egyenes” olyan kör, ami átmegy a ∞-n.)

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a}, \quad (a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

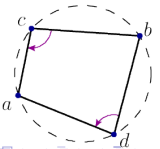
Tétel

Bármely négy különböző pont, a, b, c, d akkor és csak akkor van egy körön vagy egy egyenesen, ha $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$.
(”köregyenes”: kör vagy egyenes. Az ”egyenes” olyan kör, ami átmegy a ∞-n.)

Biz. . $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\arg \frac{c-a}{c-b} \equiv \arg \frac{d-a}{d-b} \pmod{\pi},$$

avagy irányított szögekkel $acb\sphericalangle \equiv adb\sphericalangle \pmod{\pi}$.



Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $\big(f(a), f(b); f(c), f(d)\big) = (a, b; c, d)$.

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$$

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a}\right)}$$

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{c-a}{-ac} \cdot \frac{d-b}{-bd}}{\frac{d-a}{-ad} \cdot \frac{d-c}{-cd}}$$

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{c-a}{-ac} \cdot \frac{d-b}{-bd}}{\frac{d-a}{-ad} \cdot \frac{d-c}{-cd}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(d-c)}$$

Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $\big(f(a), f(b); f(c), f(d)\big) = (a, b; c, d)$.

Biz. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.
A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.
Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{c-a}{-ac} \cdot \frac{d-b}{-bd}}{\frac{d-a}{-ad} \cdot \frac{d-c}{-cd}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(d-c)} = (a, b; c, d).$$

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Biz. Ha $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Biz. Ha $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Megjegyzés (szög a végtelenben)

A végtelenben is lehet az irányított szöget definiálni, pl. ha a Riemann-gömbön mérjük az érintők közötti szöget.

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Biz. Ha $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Megjegyzés (szög a végtelenben)

A végtelenben is lehet az irányított szöget definiálni, pl. ha a Riemann-gömbön mérjük az érintők közötti szöget. Vagy, ha a γ_1 és γ_2 görbék a ∞-ben metszik egymást, akkor ott az irányított szögük ugyanaz, mint $1/\gamma_1$és $1/\gamma_2$ görbék irányított szöge a 0-ban.

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Biz. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Biz. Ha $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

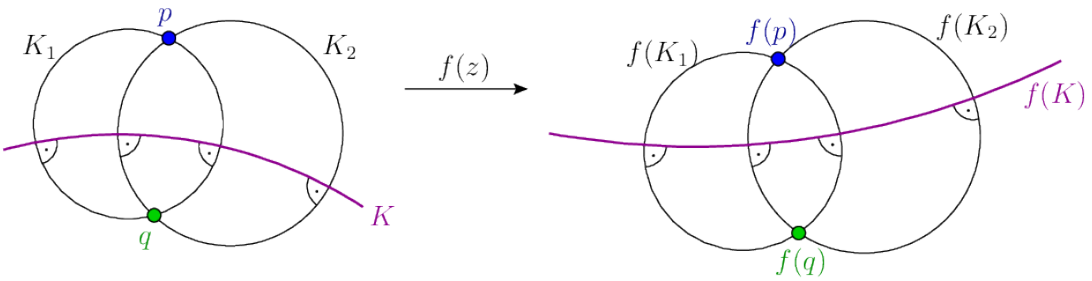
Megjegyzés (szög a végtelenben)

A végtelenben is lehet az irányított szöget definiálni, pl. ha a Riemann-gömbön mérjük az érintők közötti szöget. Vagy, ha a γ_1 és γ_2 görbék a ∞-ben metszik egymást, akkor ott az irányított szögük ugyanaz, mint $1/\gamma_1$és $1/\gamma_2$ görbék irányított szöge a 0-ban.

Ezzel a kiegészítéssel a pólusban és a végtelenben is szögtartók a törtlineáris függvények.

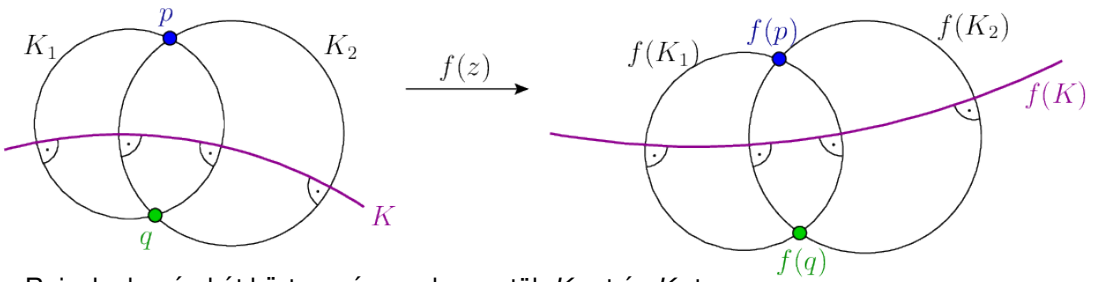
Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.



Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

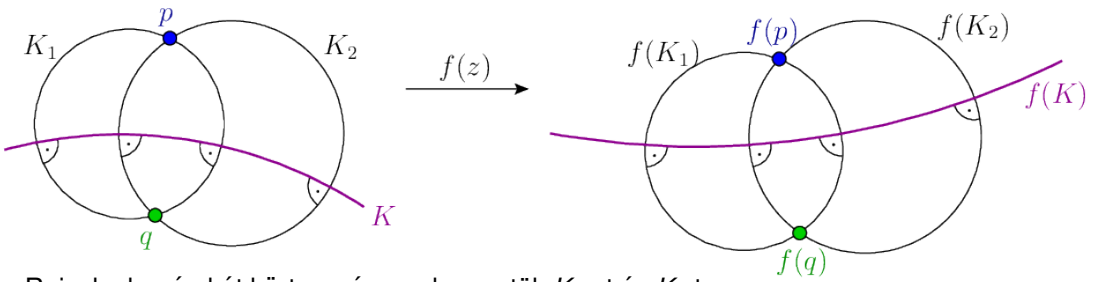


Biz. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.

Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

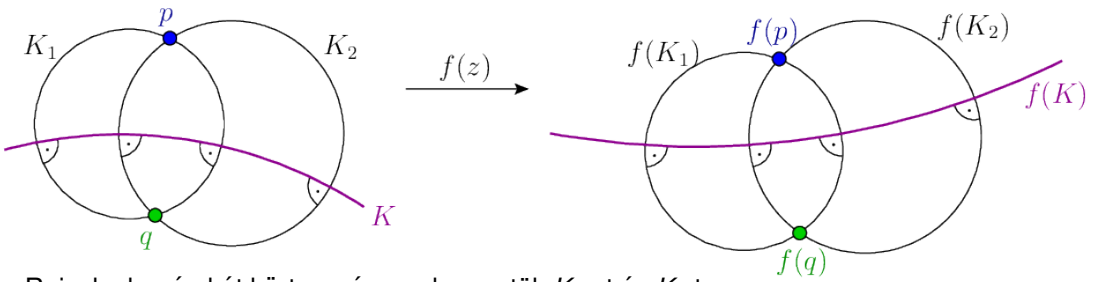


Biz. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.
- A szögtartás miatt $f(K_1)$ és $f(K_2)$ is merőlegesen metszi $f(K)$-t.

Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

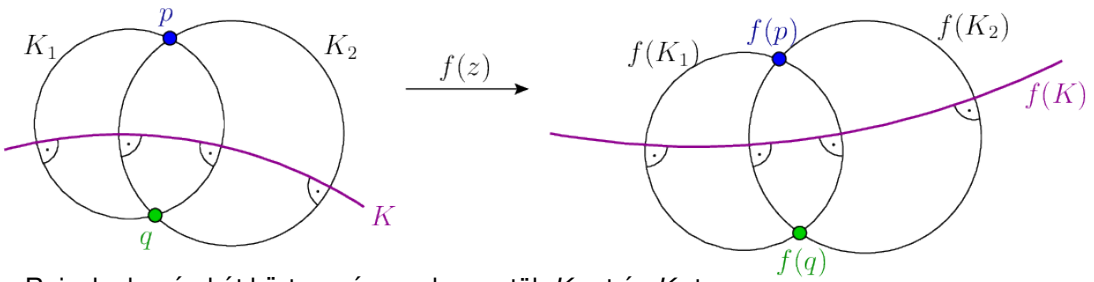


Biz. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.
- A szögtartás miatt $f(K_1)$ és $f(K_2)$ is merőlegesen metszi $f(K)$-t.
- A $f(K_1)$ és $f(K_2)$ szimmetrikus $f(K)$-ra.

Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:
Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

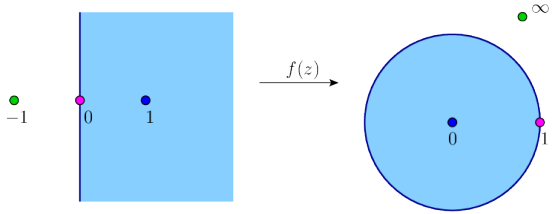


Biz. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.
- A szögtartás miatt $f(K_1)$ és $f(K_2)$ is merőlegesen metszi $f(K)$-t.
- A $f(K_1)$ és $f(K_2)$ szimmetrikus $f(K)$-ra.
- Az $f(K_1)$ és $f(K_2)$ metszéspontjai, vagyis $f(p)$ és $f(q)$ is is szimmetrikusak $f(K)$-ra.

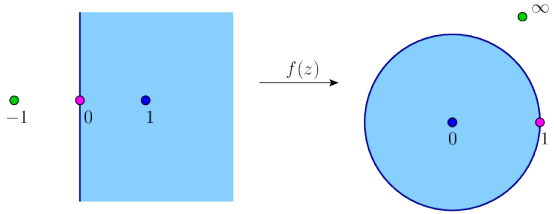
Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



Példa

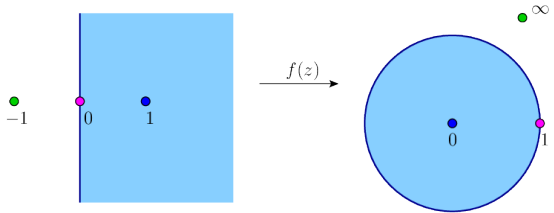
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi.

Példa

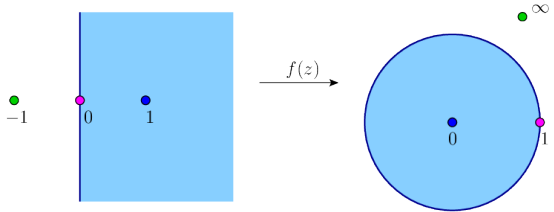
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1,

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.

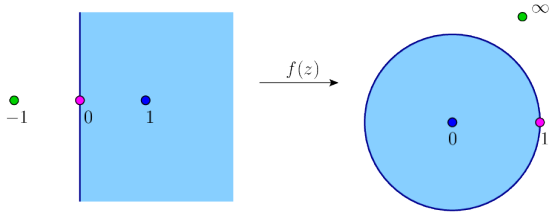


A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

$$f(-1) = \infty.$$

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



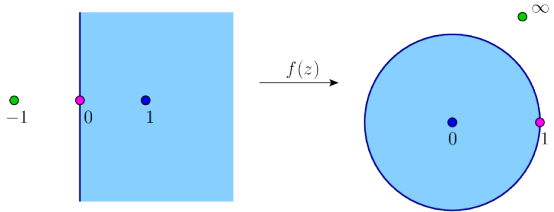
A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

$$f(-1) = \infty.$$

$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



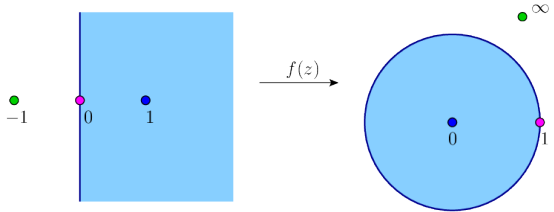
A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

$$f(-1) = \infty.$$

$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et. $\quad f(1) = 0$, tehát $a = -1$.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



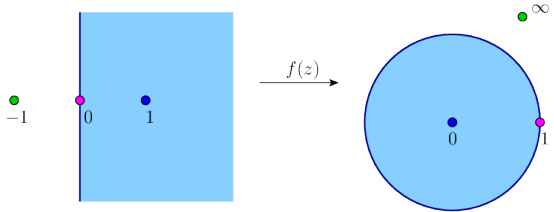
A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

$$f(-1) = \infty.$$

$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et. $f(1) = 0$, tehát $a = -1$. $f(-1) = \infty$, tehát $c = 1$.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

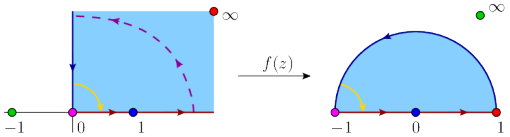
$$f(-1) = \infty.$$

$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et. $f(1) = 0$, tehát $a = -1$. $f(-1) = \infty$, tehát $c = 1$.

$$f(z) = \frac{-z+1}{z+1}.$$

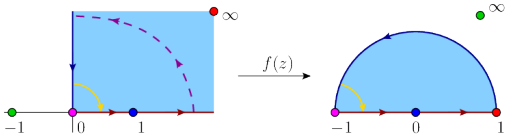
Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



Példa

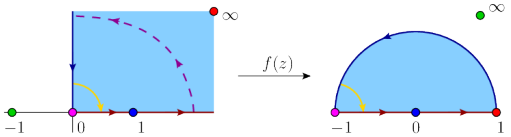
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1.

Példa

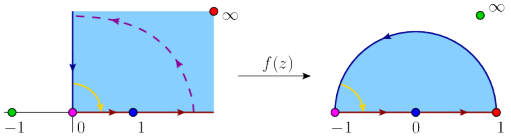
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet.

Példa

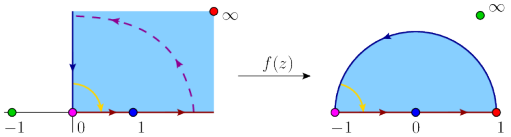
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.

Példa

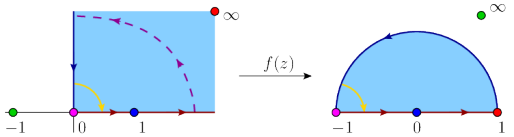
Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.

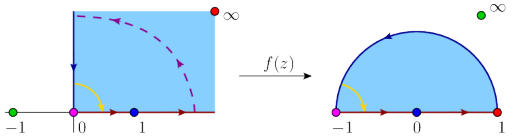


A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty;$$

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



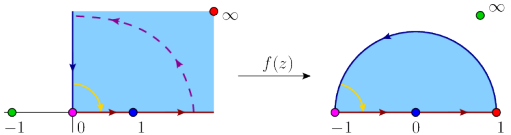
A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.

Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



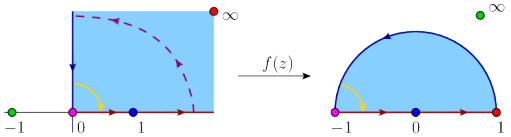
A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ ”körív” képe a $-1, 0, 1$ ”körív”.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



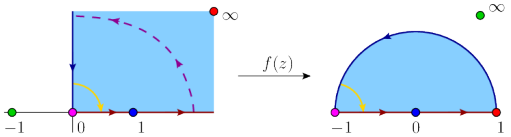
A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ "körív" képe a $-1, 0, 1$ "körív". A képzetes félegyenes képe körív, a végpontjai ± 1.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



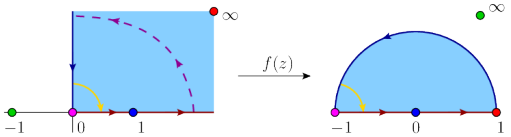
A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ "körív" képe a $-1, 0, 1$ "körív". A képzetes félegyenes képe körív, a végpontjai ± 1. A körív merőleges a $[-1, 1]$ szakaszra, tehát félkörív;

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1. Az argumentumelv miatt körüljárásnak is meg kel maradnia, tehát csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.
Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ "körív" képe a $-1, 0, 1$ "körív". A képzetes félegyenes képe körív, a végpontjai ± 1. A körív merőleges a $[-1, 1]$ szakaszra, tehát félkörív; a derékszögek irányításából is tudjuk, hogy a felső félkör.

szünet

18. Az egységkörlemez konform automorfizusai

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.
(Eredetileg a ”konform” szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.
(Eredetileg a ”konform” szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Két tartomány, D_1 és D_2 konform ekvivalens, ha létezik közöttük konform megfeleltetés.

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.
(Eredetileg a ”konform” szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Két tartomány, D_1 és D_2 konform ekvivalens, ha létezik közöttük konform megfeleltetés.
Az $D \to D$ konform megfeleltetéseket D konform automorfizmusainak nevezzük.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leq 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leq 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leq 1$.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leq 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leq 1$.

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt $f'(0) \cdot g'(0) = 1$.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Biz. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a ”csak”) a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leq 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leq 1$.

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt $f'(0) \cdot g'(0) = 1$.

Mindez csak úgy lehetséges, ha $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$, és f és g is forgatás.

Lemma

Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}.$$

Lemma

Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Lemma

Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Lemma

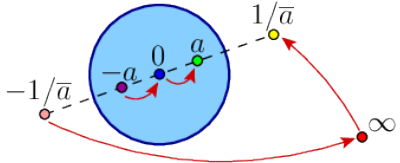
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.

Lemma

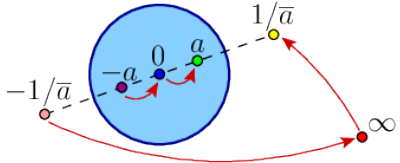
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$

Lemma

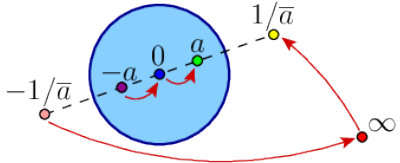
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z|$

Lemma

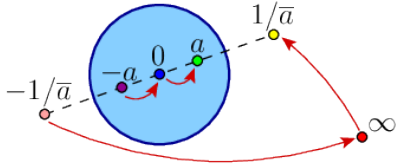
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z|$

Lemma

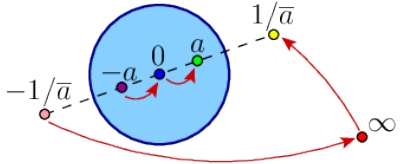
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}|$

Lemma

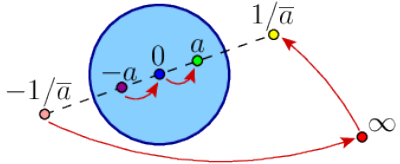
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$,

Lemma

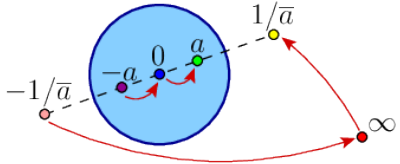
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$;

Lemma

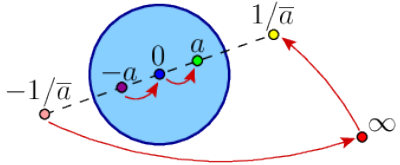
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.

Lemma

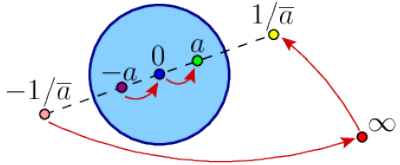
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.

Lemma

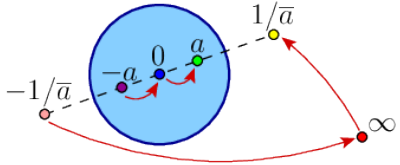
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni,

Lemma

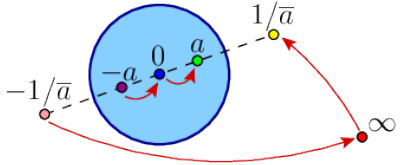
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük:

Lemma

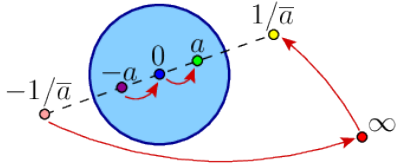
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$,

Lemma

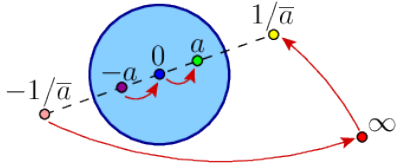
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$;

Lemma

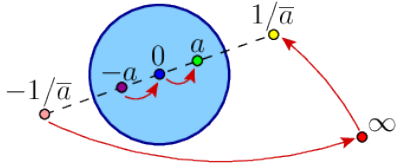
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$; a tükörképekre $\varphi^{-1}(1/\overline{a}) = \infty$,

Lemma

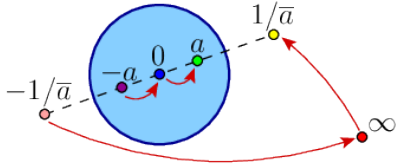
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Biz. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.
Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.
A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$; a tükörképekre $\varphi^{-1}(1/\overline{a}) = \infty$, $\varphi^{-1}(\infty) = -1/\overline{a}$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

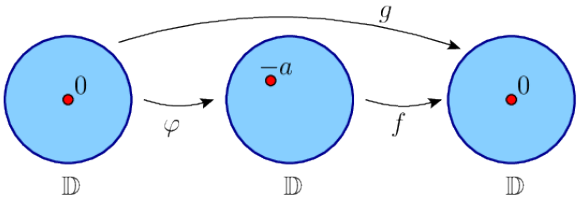
Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.

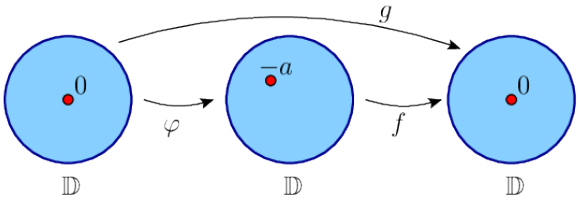


Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



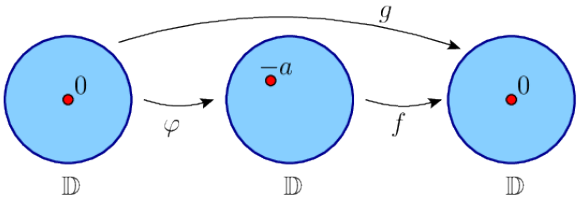
Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

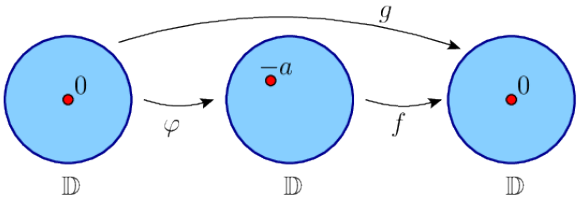
A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

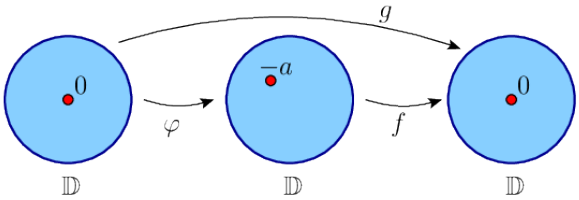
Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

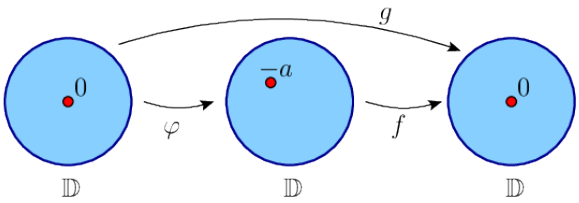
$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z))$$

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

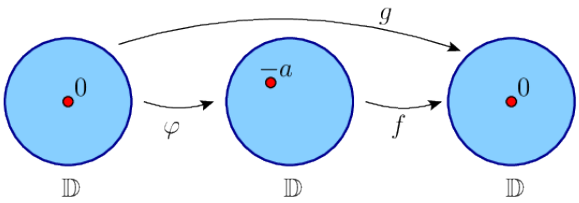
$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = \varepsilon \cdot \varphi^{-1}(z)$$

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Biz. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = \varepsilon \cdot \varphi^{-1}(z) = \varepsilon \cdot \frac{z+a}{1+\bar{a}z}.$$

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.
Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.
Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

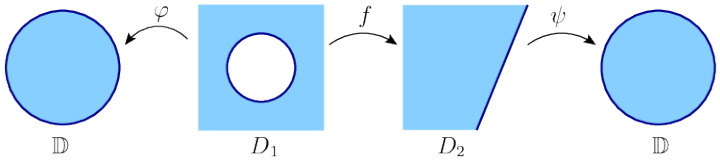
(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.
Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között. Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy törtlineáris függvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.

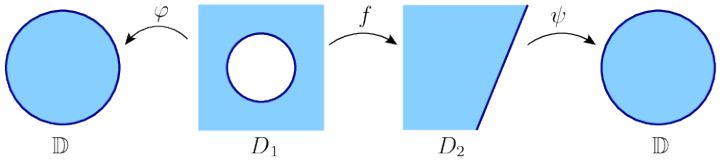


Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.
Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között. Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy törtlineáris függvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.



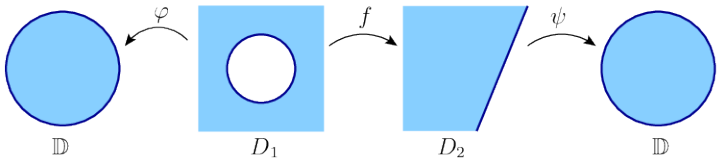
A $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ az egységkörnek konform automorfizmusa, tehát törtlineáris függvény.

Tétel

- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Biz. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.
Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között. Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy törtlineáris függvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.



A $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ az egységkörnek konform automorfizmusa, tehát törtlineáris függvény.
Akkor viszont $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ is törtlineáris függvény.

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya.

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

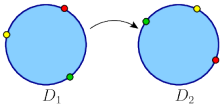
- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Tétel

Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Biz. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.

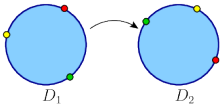


Tétel

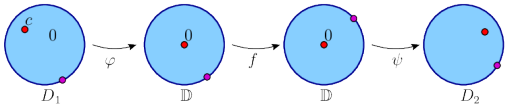
Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Biz. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.



(b) Elég az egységkörlemezre bizonyítani; $\dfrac{z+a}{1-\overline{a}z}$ alakú függvényekkel kombinálva elérhetjük, hogy a megadott pont és a képe is a 0 legyen; utána a megadott határpont megmondja, hogy melyik forgatásról van szó.

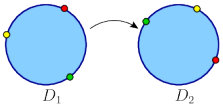


Tétel

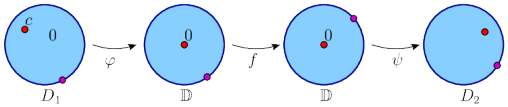
Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Biz. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.



(b) Elég az egységkörlemezre bizonyítani; $\dfrac{z+a}{1-\overline{a}z}$ alakú függvényekkel kombinálva elérhetjük, hogy a megadott pont és a képe is a 0 legyen; utána a megadott határpont megmondja, hogy melyik forgatásról van szó.

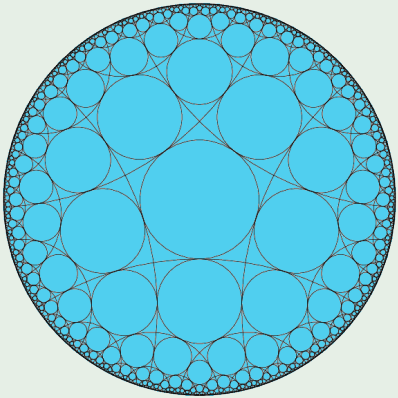


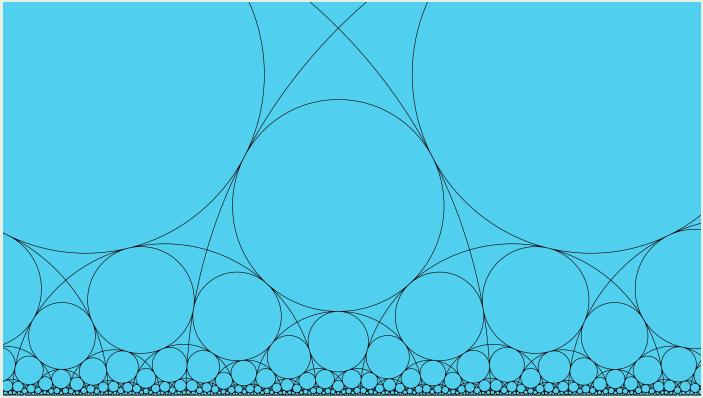
(c) Ugyanaz, mint a (b), csak a forgatást nem egy határpont, hanem derivált iránya mondja meg:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi\big)'(c) = \psi'(0) \cdot f'(0) \cdot \varphi'(c).$$

Mese

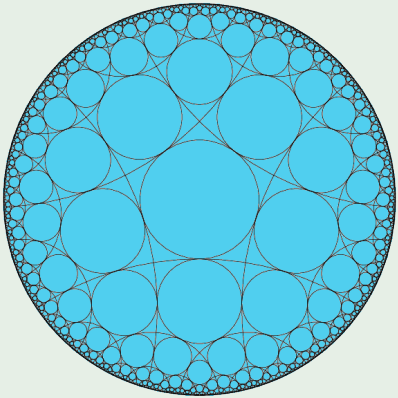
Az egységkörlemezt szeretjük azonosítani a Poincaré-féle körmodellel, a felső félsíkot pedig a félsíkmodellel.

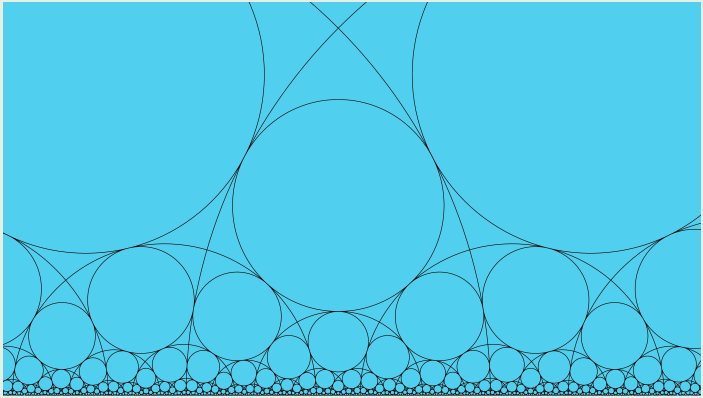




Mese

Az egységkörlemezt szeretjük azonosítani a Poincaré-féle körmodellel, a felső félsíkot pedig a félsíkmodellel.





A konform automorfizmusok a modellek irányítástartó egybevágóságai.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \bar{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \leq \left(\max_{|z|=r} |g(z)| \right),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1 - \overline{a}z}{z - a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \leq \left(\max_{|z|=r} |g(z)| \right),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r \to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \geq \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|,$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \geq \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \geq \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \geq \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \geq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|$$

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Biz. . A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leq \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \geq \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \geq \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ alakú ”gyöktényezők” úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ alakú ”gyöktényezők” úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.

Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ alakú ”gyöktényezők” úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.

Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Az ilyen típusú szorzatokat véges Blaschke-szorzatoknak nevezzük.

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ alakú ”gyöktényezők” úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.

Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Az ilyen típusú szorzatokat véges Blaschke-szorzatoknak nevezzük.

Ugyanígy pólusokat is megszüntethetünk az $\dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$ alakú törtek kiemelésével.

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom	**véges Blaschke-szorzat**

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

véges Blaschke-szorzat

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

véges Blaschke-szorzat

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

véges Blaschke-szorzat

$$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

véges Blaschke-szorzat

$$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Pl. Gauss–Lucas tétel: Ha f legalább másodfokú polinom, akkor f gyökeinek konvex burka tartalmazza f' gyökeit.

véges Blaschke-szorzat

$$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom

$$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$$

(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Pl. Gauss–Lucas tétel: Ha f legalább másodfokú polinom, akkor f gyökeinek konvex burka tartalmazza f' gyökeit.

véges Blaschke-szorzat

$$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}$$

(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)

Ha f legalább kéttényezős Blaschke-szorzat, akkor f gyökeinek a körmodellben vett konvex burka tartalmazza f'-nek az egységkörbe eső gyökeit.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right).$$

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = \infty$, akkor Blaschke-szorzat a konstans 0.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|) = \infty$, akkor Blaschke-szorzat a konstans 0.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|) < \infty$, akkor Blaschke-szorzat nem a konstans 0, és a gyökei $a_1, a_2, \ldots$, továbbá $m > 0$ esetén a 0.

Mára vége, de...

A jövő heti előadáson szükség lesz rá:

- $\log f(z)$ létezése egyszeresen összefüggő tartományon, ha $f \neq 0$

A jövő heti előadáson szükség lesz rá:

- $\log f(z)$ létezése egyszeresen összefüggő tartományon, ha $f \neq 0$
- Weierstrass-tétel (holomorf függvények lokálisan egyenletes limesze holomorf)

A jövő heti előadáson szükség lesz rá:

- $\log f(z)$ létezése egyszeresen összefüggő tartományon, ha $f \neq 0$
- Weierstrass-tétel (holomorf függvények lokálisan egyenletes limesze holomorf)
- Vitali–Montel tétel (lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat kiválasztása egyenletesen korlátos függvénysorozatból)