2. Fourier Analízis gyakorlat, 2021. február 19.

2.1. Igazoljuk, hogy ha $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor $\left|\hat{f}(n)\right| \le O(1/n)$.
(Elég monoton függvényre; integráljunk parciálisan Stieltjes-integrálokkal)

2.2. Igazoljuk, hogy Fourier-sort szabad tagonként integrálni.

2.3. Legyen

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_{n-1}(x)}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

az n-edik Fejér-magfüggvény.
Igazoljuk, hogy $F_n \ge 0$, $\int F_n = 1$, és bármely $0 < r < \pi$ esetén $\int_{-r}^{r} F_n \to 1$.

2.4. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Fourier-sor részletösszegei egyenletesen korlátosak.
(Vágjuk ketté a szummát $1/|x|$-nél; kis k-ra becsüljük triviálisan, nagy k-ra Abel-átrendezés)

2.5. Legyen $\alpha > 0$. azt mondjuk, hogy az f függvény "Hölder-α folytonos", ha van olyan $\delta_0 > 0$ és $C > 0$, hogy bármely $|x - y| < \delta_0$ esetén $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$.
Igazoljuk, hogy ha $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Hölder-folytonos és $f(\pi) = f(-\pi)$, akkor f-hez egyenletesen konvergál a Fourier-sora.

2.6. Határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$$

Fourier-sor összegfüggvényét.

Beadandó házi feladat

A Teamsben feltöltendő február 25-ig

BE-2 Legyen

$$V_n(x) = 2F_{2n}(x) - F_n(x),$$

az n-edik de la Vallée Poussin féle magfüggvény.
Igazoljuk, hogy $> V_n \ge 0$, $\int V_n = 1$, és bármely $0 < r < \pi$ esetén $\int_{-r}^{r} V_n \to 1$.