3. Fourier Analízis gyakorlat, 2021. február 26.

3.1. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ 2π szerint periodikus és folytonosan differenciálható, akkor

$$\Big(\sigma_N(f,x)\Big)' \to f'(x)$$

egyenletesen.

3.2. Legyen $f \in L_1\big([-\pi,\pi]\big)$, és tegyük fel, hogy léteznek az $f(-0)$ és $f(+0)$ féloldali határértékek. Igazoljuk, hogy

$$\sigma_n(f,0) \to \frac{f(-0)+f(+0)}{2}.$$

3.3. Tekintsük az

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

hullámegyenletet. Mekkora a hullámok terjedési sebessége?

3.4. Hányadrészénél kell megpengetni a gitárhúrt, hogy ne szólaljon meg az első, illetve a második felharmonikus?

3.5. For a positive integer N, let f_N be the function defined by

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N+1/2-n}{(N+1)(2n+1)} \sin((2n+1)x).$$

Determine the smallest constant M such that $f_N(x) \le M$ for all N and all real x.

(Putnam 2020/A6)

Beadandó házi feladat

A Teamsben feltöltendő március 4-ig

BE-3 A Dirichlet-feladat megoldásakor a határon előírt $f(\theta)$ függvényt Fourier-sorba fejtettük, és a megoldást az

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \left(r^{|n|} e^{ni\theta}\right)$$

alakban írtuk fel.

Írjuk be $\hat{f}(n)$ definícióját, és írjunk fel olyan $P_r(t)$ magfüggvényt, amelyre

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot P_r(\theta - t)\, \mathrm{d}t.$$

Ellenőrizzük, hogy

$$P_r(t) = \mathrm{Re}\, \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}.$$