11. Fourier Analízis gyakorlat, 2021. április 30.

11.1. Gondoljuk meg, hogy az $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sűrű altere $L_2(\mathbb{R}^d)$-nek, és a Fourier-transzformáció unitér oprációvá az $L_2(\mathbb{R}^d)$ téren.

11.2. Az

$$\begin{aligned}
f(x+h) &\longrightarrow \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i\langle \xi,h\rangle} \\
f(x)e^{-2\pi i\langle x,h\rangle} &\longrightarrow \widehat{f}(\xi+h) \\
f(\delta x) &\longrightarrow \delta^{-d}\widehat{f}(\delta^{-1}\xi) \\
\frac{\partial}{\partial x_j}f(x) &\longrightarrow 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi) \\
-2\pi i x_j f(x) &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi_j}\widehat{f}(\xi) \\
f(Rx) &\longrightarrow \widehat{f}(R\xi)
\end{aligned}$$

azonosságok közül melyik vihető át az $L_1(\mathbb{R}^d)$ vagy az $L_2(\mathbb{R}^d)$ térre?

11.3. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a d-dimenziós Poisson összegzési formulát.

Beadandó házi feladat

A Teamsben feltöltendő május 13-ig

BE-11. Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ és $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 = 1$, akkor

$$\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d} |x|^2 \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\xi|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right) \geq \frac{d}{4\pi}.$$