

Tájékoztató és részletes tételjegyzék a Komplex függvénytan (sillabusz)

2022/2023, I. félév

Matematika BSC, III. évfolyam, matematikus szakirány

Jelenléti, szóbeli vizsga lesz. A vizsgatételek közül kettőt húztok. Kb. 60 percet vesz a tételek vázlatos kidolgozására, amit kb. 20 percen szóban elmeséltek és válaszoltok a vizsgáztató kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket pontosan meg is érteni.

Ha valamelyik részre vagy tételre a vizsgázó tudása elégtelen, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

1. Komplex differenciálhatóság

Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Határérték ∞ -ben. Riemann-gömb. Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Cauchy–Riemann-egyenletek. Holomorf függvény. Egészfüggvény. Az inverzfüggvény differenciálási szabálya.

2. Hatványsorok

Hatványsor konvergenciája. Differenciálhatóság. Cauchy-Hadamard tétel. Taylor-együttható, egyértelműség. Analitikus függvények.

3. Elemi függvények

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. A logaritmus és a hatványfüggvény értelmezésének problémái, többértékű függvény holomorf ága.

4. Komplex vonalintegrálok

Rektifikálható folytonos görbén vett folytonos függvény vonalintegrálja. Átírás Riemann-Stieltjes integrálokkal. Átírás Riemann-integrállá, ha a görbe folytonosan differenciálható. Átparaméterezés, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Helyettesítéses integrálás. Newton-Leibniz formula.

5. Cauchy-alaptétel

A primitív függvény létezésének kapcsolata a vonalintegrál eltűnésével. Goursat-lemma és általánosítása. Cauchy-alaptétel konvex, és csillagszerű tartományra. Holomorf függvénynek minden konvex/csillagszerű tartományon van primitív függvénye. Homotóp görbéken a vonalintegrál megegyezik. Példa arra, hogy nem egyszerű tartományon a Cauchy-alaptétel nem igaz.

6. Cauchy-integrálformulák

Cauchy-formula körvonalon. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula. Ha egy függvény egy nyílt halmazon egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható. Görbe pontra vonatkozó indexe. Az index tulajdonságai. Az általános Cauchy-formula görbeindexszel (csak kimondani). A logaritmus létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

7. Függvénysorozatok és paraméteres integrálok

Holomorf függvények lok. egyenletes limesze holomorf. Ugyanez sorokkal és paraméteres integrálokkal. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali-Montel tétel.

8. Hatványsorba fejtés

Együtthatóformula. Hatványsorba fejtés. Középérték-tulajdonság. Parseval-formula hatványsorokra. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

9. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése, gyök multiplicitása. Unicitástétel. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximum-elv. Schwarz-lemma.

10. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékészlete sűrű. Kis Picard-tétel (csak kimondani). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

11. Laurent-sorok

Laurent-sorok konvergenciája. Kapcsolat a Fourier-sorokkal. Együtthatóformula. Egyértelműség. Laurent-sorba fejtés. Rac.tört függvények Laurent-sorba fejtése. A $ctg z$ függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja. Parseval-formula.

12. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szingularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati-Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (csak kimondani). Viselkedés a ∞ -ben.

13. A reziduomtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduomtétel. Módszerek a reziduum kiszámítására. Reziduum ∞ -ben.

14. A reziduomtétel alkalmazásai

A reziduomtétel alkalmazásai improprius integrálok és numerikus sorok összegének kiszámítására.

15. Argumentum-elv

Meromorf függvények. Logaritmus derivált. Argumentumelv rektifikálható görbékkel határolt tartományra. Az argumentumelv kiterjesztései

16. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

17. Lineáris tört függvények

Lineáris tört függvények. Reprezentáció mátrixszorzással. Három pont képe egyértelműen meghatározza a lineáris tört függvényt. Komplex kettősviszony. Kettősviszonytartás, körtartás, szögtartás, szimmetriatartás.

18. Az egységkörlemez konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú lineáris tört függvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés lineáris tört függvény. Az $\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ alakú törtek kiemelése az egységkörben holomorf függvényekből. Véges és végtelen Blaschke-szorzatok.

19. A konform leképezések alaptétele

Riemann-alaptétel. Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze. A Riemann-alaptétel bizonyítása.

20. A tükrözési elv

Caratheodory tétele (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés körvonalakra. Bizonyítás a kis Picard-tételre

21. Harmonikus függvények

Laplace-operátor, harmonikus függvények. Laplace-egyenlet. Egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha lokálisan egy holomorf függvény valós része. Maximum- és minimum-elv. Poisson-formula.

22. Dirichlet-feladat

A Dirichlet-feladat. A Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlemezen. A harmonikus függvények jellemzése a középértéktulajdonsággal.