# 1. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. szeptember 16.

- Jelenlét, készülés:
  - A gyakorlaton a részvétel kötelező. A HKR szerint aki négynél többször hiányzik, nem kaphat gyakorlati jegyet (elégtelent sem).
  - A házi feladatok megoldása, de legalább alapos gondolkodás a feladatokon szintén kötelező.
- Számonkérés:
  - Két ZH, nov. és dec. 9.
  - Minden gyakorlat elején véletlenszerűen vagy írunk, vagy nem írunk röpdolgozatot az egyik házi feladatból. A röpdolgozatokra 0–6 pontot lehet kapni. Aki hiányzik, vagy lekési a dolgozatírást, annak a pontszáma 0.
  - Lesznek valamivel gondolkodtatóbb szorgalmi feladatok, amelyekkel Pedál Medál Pirospontokat lehet gyűjteni. Egy Pedál Medál Pirospont értéke 0,2 gyakorlati jegy, de ezek csak az elégséges osztályzat megszerzése után használhatók fel.
- Várható osztályozás:
  - A gyakorlati jegy
    $$\approx \frac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R}}{5} + P \cdot 0,2,$$
    ahol $0 \leq Z_1, Z_2 \leq 7$ a két ZH pontszám, $0 \leq \overline{R} \leq 6$ a röpdolgozatok átlaga a legrosszabbul sikerült dolgozat nélkül, $P$ a megszerzett Pedál Medál Pirospontok száma.
  - Javítási lehetőség: a pót ZH-n, ami a rosszabbul sikerült vagy elmulasztott ZH helyett számít.
- További gyakorló feladatok: Fehér–Kós–Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II, `http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101`

**1.1.** Ábrázoljuk azoknak a $z$ komplex számoknak a halmazát, amikre

$$(a)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1; \quad (b)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2; \quad (c)\ \arg(z+1) \equiv \arg(2z-i) \pmod{2\pi}; \quad (d)\ \mathrm{Re}(z^2) = 4.$$

**1.2.** Írjuk fel képlettel az $1+i$ pont körüli 45 fokos, pozitív irányú forgatást.

**1.3.**

(a) Hova képezi a $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ Zsukovszkij-leképezés az egységkörvonalat?

(b) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei $1, -1$ fókuszú ellipszisek.

(c) Mutassuk meg, hogy a 0-n átmenő, a tengelyektől különböző egyenesek képei $1, -1$ fókuszú hiperbolák.

(d) Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $1, -1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

**1.4.** Írjuk fel azokat az $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $u(x,y) + v(x,y) \cdot i = (x+yi)^3$, és ellenőrizzük a Cauchy-Riemann egyenleteket.

**1.5.** Írjuk fel az összes olyan $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az

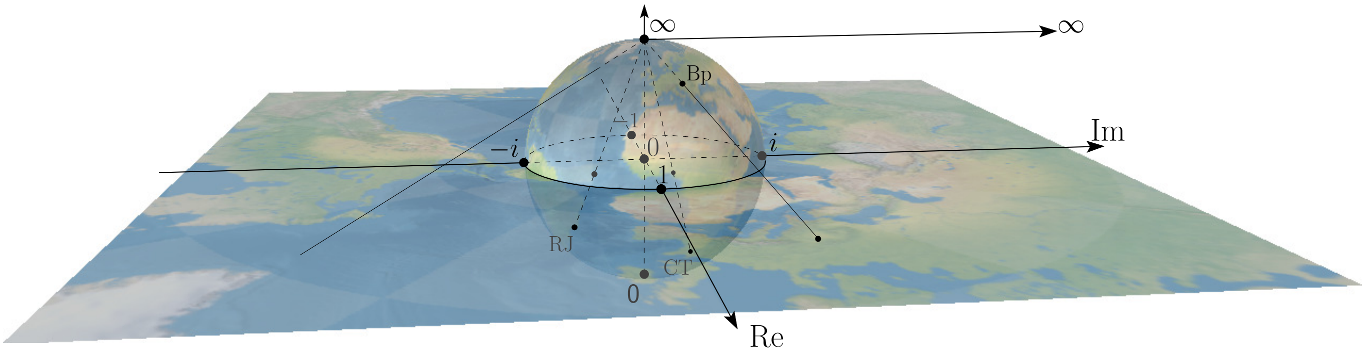
$$f(x+yi) = (x^3y - xy^3) + v(x,y)i$$

függvény holomorf.

**1.6.** Fejtsük hatványsorba a 0 körül az $\dfrac{1}{(1+z)^3}$ függvényt.

**1.7.** A Riemann-gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z \mapsto -z; \qquad z \mapsto \overline{z}; \qquad z \mapsto iz; \qquad z \mapsto \frac{1}{z}; \qquad z \mapsto \frac{-1}{\overline{z}}; \qquad z \mapsto \frac{z-i}{1-iz}$$




### Házi feladatok

**1.8.** Írd fel képlettel a 2, $i$ pontokat összekötő egyenesre való tükrözést.

**1.9.** Írd fel az összes olyan $f(z)$ egészfüggvényt, amelyre $\operatorname{Im} f(x+yi) = x^2 - y^2$.

**1.10.** Fejtsd 1 körüli hatványsorba az $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ függvényt. Mi a hatványsor konvergenciasugara?

**1.11.** Legyen $a$ és $b$ két különböző komplex szám.

(a) Igazold, hogy az $a$, $b$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $\det \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(b) Milyen geometriai jelentése van a $\det \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix}$ számnak?

(c) Írd fel az $a, b, c$ pontokon átmenő kör egyenletét determináns alakban.

### Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható okt. 9-ig

**PM 1.1.** Abel-átrendezéssel bizonyítsd be, hogy a $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{z^n}{n}$ hatványsor az egységkörvonal minden, az 1-től különböző pontjában konvergál.

**PM 1.2.** Legyen $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ olyan hatványsor, anely a $z = 1$ pontban konvergens.

(a) Tegyük fel, hogy $0 < A < \frac{\pi}{2}$, továbbá $w_1, w_2, \ldots$ olyan komplex számok, amelyekre $|w_n| < 1$, $w_n \to 1$ és $\big|\arg(1 - w_n)\big| < A$. Mutasd meg, hogy $f(w_n) \to f(1)$.

(b) Igaz marad-e ez az állítás akkor, ha a $(w_n)$ sorozatról csak annyit kötünk ki, hogy $|w_n| < 1$ és $w_n \to 1$?