3. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. október 3.

3.1. Legyen $n \in \mathbb{Z}$ (negatív is lehet), $a \in \mathbb{C}$ és $r > |a|$.

$$\int\limits_{|z|=r} (z-a)^n \,\mathrm{d}z = ? \qquad \int\limits_{|z|=r} (z-a)^n e^z \,\mathrm{d}z = ?$$

3.2. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ e^{2z},\ \mathbb{C}; \qquad (b)\ e^{z^2},\ \mathbb{C}; \qquad (c)\ z^2 + \frac{1}{z^2},\ \mathbb{C}\setminus\{0\}; \qquad (d)\ z + \frac{1}{z},\ \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

3.3. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Re} z < 0$ esetén

$$\left|1 - e^z\right| < |z|.$$

(Hol van ebben vonalintegrál?)

3.4. A legalább másodfokú p polinom maximális abszolút értékű gyöke α. Legyen $r > |a|$ esetén $I(r) = \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{p(z)} \mathrm{d}z$. Igazoljuk, hogy

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} = 0$.

(b) $I(r)$ konstans.

(c) ???

3.5. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i a x} \mathrm{d}x = \cdot e^{-\pi a^2},$$

avagy az $e^{-\pi i x^2}$ függvény Fourier-transzformáltja önmaga.

(Alakítsuk a kitevőt teljes négyzetté, és integráljunk egy téglalap kerületén.)

3.6. Az f függvény holomorf az egységkörben, és $|f| < 1$. legfeljebb mekkora lehet $f'''(0)|$?

Házi feladatok

3.7.

$$(a) \int\limits_{|z|=1} \frac{1+z+z^2}{z} \mathrm{d}z = ? \qquad (b) \int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z = ?$$

3.8. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ \overline{z},\ \mathbb{C}; \quad (b)\ \operatorname{Re} z,\ \mathbb{C}; \quad (c)\ \frac{1}{z},\ \{\operatorname{Re} z > 0\}; \quad (d)\ \frac{1}{z^3 - z},\ \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\} \quad (e)\ \frac{1}{z^3 + z},\ |z| > 1$$

3.9. Legyen a komplex szám. Alakítsd át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|z-a\right|^2 |\mathrm{d}z|$$

integrált, majd számítsd ki.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható okt. 23-ig

PM 3.1. Legyen $p(z)$, komplex együtthatós, n-edfokú polinom, $n \geq 1$. Integráld a $\dfrac{z^{n-1}}{p(z)}$ függvényt egy nagy körön, és bizonyítsd be, hogy $p(z)$-nek van komplex gyöke.

PM 3.2. A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Hányszor kerüli meg a γ görbe a 0-t?