4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. október 7.

4.1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\cos z\,\mathrm{d}z=? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z-1|=2}\frac{e^z}{(z-2)^2(z+2)^2}\mathrm{d}z=?$$

4.2. Az $f(z)$ függvény holomorf a felső félsíkban, és $|f|\le 1$. Keressünk felső becslést $\left|f'(i)\right|$ értékére.

4.3. Legyen $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z|=\frac{1}{2}$ körön: cseréljük ki a kört egy $R>1$ sugarú körre (közben alkalmazzuk a Cauchy-formulát az 1 pontban) és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R\to\infty$.

4.4. Legyen D tartomány, $f_1,f_2,\ldots:D\to\mathbb{C}$ holomorf függvények, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty}\sup|f_n|$ véges. Igazoljuk, hogy a $\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+f_n(z)\big)$ végtelen szorzat holomorf.

4.5. Alkalmazhatjuk-e a Vitali-Montel tételt az $f_n(z)=\sin(nz)$ függvénysorozatra az egységkörben?

Házi feladatok

4.6.

$$\int_{|z|=2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n\mathrm{d}z=? \quad (n\in\mathbb{Z},\text{ negatív is lehet!})$$

4.7. Az $f(z)$ függvény holomorf a $0<|z|<1$ halmazon, és $|f(z)|<\frac{1}{\sqrt{|z|}}$. Mutassuk meg, hogy

(a) f-nek minden 0 körüli körön 0 a vonalintegrálja;
(b) f-nek van primitív függvénye.

4.8. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^n}\right)$ egészfüggvény.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható okt. 23-ig

PM 4.1. (a) Igazoljuk, hogy $\operatorname{Re}s>1$ félsíkban

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^s}\right);$$

(b) A jobboldalon álló összeg holomorf a jobb félsíkban.

PM 4.2. Legyen $0<c\le 1$ és

$$\left(\frac{-z}{\log(1-z)}\right)^c=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad (|z|<1).$$

Bizonyítsd be, hogy $a_1,a_2,\ldots$ mindegyike negatív.