5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. október 14.

5.1. Van-e olyan $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény ($\mathbb{D}$ a nyílt egységkörlemez), melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{(a) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{n+2}; \qquad \text{(b) } \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^n}?$$

5.2. Legyen $f(z)$ egészfüggvény (az egész síkon holomorf függvény).

(a) Igazoljuk, hogy $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ és $h(z) = \overline{f(-\bar{z})}$ is egészfüggvény.

(b) Az $f(z)$, $g(z)$ és $h(z)$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

5.3. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$? (Vizsgáljuk a $g(z) = f(z) \cdot \overline{f(\overline{z})}$ függvényt.)

5.4. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

5.5. Legyen $f(z)$ olyan egészfüggvény, amelyre $|f(z)| \le e^{|z|}$, és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a függvény 0 körüli hatványsora. Az együtthatóbecslés segítségével igazoljuk, hogy $|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (Mekkora körre érdemes felírni az együtthatóbecslést?)

5.6. A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus többszörösei), akkor f konstans.

Házi feladatok

5.7. Az $f(z)$ függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $[-2, -1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

5.8. Az $f(z)$ egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

5.9. Az $f(z)$ függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \le t \le \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \le t \le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$. (Maximum-elv egy alkalmas függvényre.)

5.10. Legyen f egészfüggvény. Igazoljuk, hogy amennyiben f sehol sem tűnik el, és $\arg f(z)$ nem vesz fel minden értéket, akkor f konstans.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható nov. 6-ig

PM 5.1. (A kis Picard-tétel felhasználása nélkül) bizonyítsd be, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor minden egyenes szakaszon van értéke.

PM 5.2. Az f egészfüggvényt *érdekesnek* nevezzük, ha a $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ parabola pontjaiban $\operatorname{Re} f = 0$.

(a) Bizonyítsd be, hogy minden f érdekes függvényre teljesül, hogy $f'(-3/4) = 0$.

(b) Mutass példát nemkonstans érdekes függvényre.

(CIIM 2014, Costa Rica)