6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. október 21.

6.1. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 - 4}$$

függvényt a -1 körül, az $1 < |z - 1| < 3$ halmazon.

6.2. Igazoljuk, hogy ha f holomorf az $\frac{9}{10} < |z| < \frac{11}{10}$ halmazon, akkor

$$\int_{|z|=1} \left|f'(z)\right|^2 |\mathrm{d}z| \leq \int_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 |\mathrm{d}z| + \int_{|z|=1} \left|f''(z)\right|^2 |\mathrm{d}z|.$$

6.3. Az f függvény holomorf a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon, és

$$\lim_{z \to 0} \big(z\, f(z)\big) = \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy f konstans.

6.4. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

6.5. Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p\,(f(z))$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

6.6. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa? (Ha $\lim\limits_{z \to c} e^{f(z)} = \infty$, akkor...)

Házi feladatok

6.7. Írd fel a $\dfrac{2}{z(z+1)}$ függvény 1 körüli Laurent-sorait.

6.8. Legyen $D_1 = \{z : r < |z| < R\}$ és $D_2 = \{z : |z| < R\}$, ahol $0 < r < R$ valós számok. A 0 körüli Laurent-sor segítségével bizonyítsd be, hogy tetszőleges $f : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

(1) f analitikusan (holomorfan) folytatható D_2-re;

(2) f-nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;

(3) Bármely $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en.

6.9. Differenciálható-e 0-ban az

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} & \text{ha } z \neq k\pi \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvény?

6.10. Bizonyítsd be, hogy ha f 1 szerint periodikus egészfüggvény, amire $|f(z)| \leq e^{6|z|}$, akkor f konstans. (Vizsgáld a $g(z) = f(.....)$ függvényt.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 13-ig

PM 6. Igazold, hogy

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right).$$