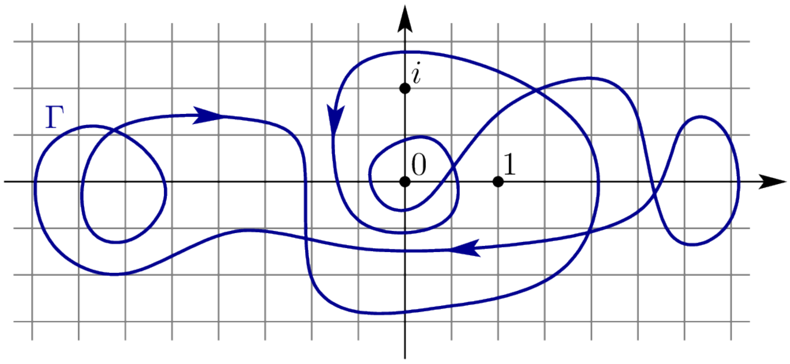
7. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. október 28.

7.1. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? (A ∞-ben is lehet!) Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad \frac{1}{z^2+2z}; \qquad \frac{1}{\sin z}; \quad \sin\frac{1}{z}; \quad \frac{e^z}{z^2+1}; \quad \frac{e^z}{(z+1)^2}$$

7.2. Legyen f egészfüggvény, és Γ az ábrán látható zárt görbe. Fejezzük ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2\cos z}\mathrm{d}z$ értékét $f(0)$, $f'(0)$ és $f(\pm\frac{\pi}{2})$ segítségével.



7.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk félkörön. A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

7.4.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk a 120°-fokos szögtartomány határán. A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

7.5. Legyen $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-1}$. Ellenőrizzük, hogy

$$\operatorname*{Res}_{1} f + \operatorname*{Res}_{-1} f + \operatorname*{Res}_{\infty} f = 0.$$

7.6. A reziduumtételből vezessük le, hogy ha $p(z)$ legalább másodfokú polinom, és a gyökei, $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ különbözők, akkor $\sum \dfrac{1}{p'(\varrho_k)} = 0$.

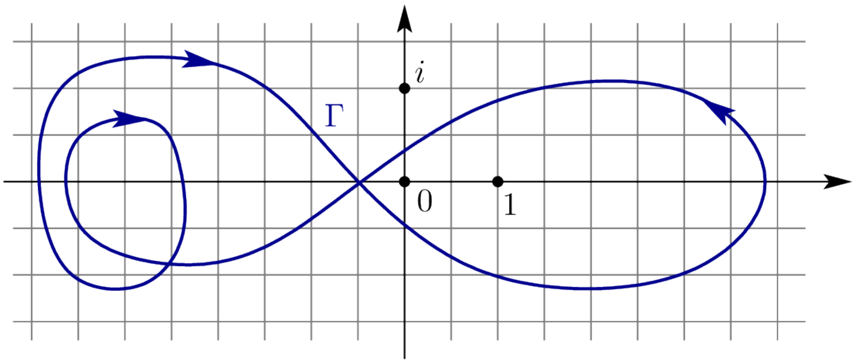
Házi feladatok

7.7.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

7.8. Legyen f egészfüggvény. Fejezd ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(\pi/2)$ stb. segítségével.



7.9.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható nov. 20-ig

PM 7.1. Legyen n pozitív egész szám, és φ egészfüggvény. Tetszőleges $X > 0$ valós szám esetén legyen

$$f(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s)\cdot X^s}{s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-n)}\mathrm{d}s.$$

(a) Igazold, hogy $f(X)$ polinom.

(b) Milyen integrálok állítják elő f deriváltjait?

(c) Mutasd meg, hogy ha φ polinom, és $\deg\varphi = k < n$, akkor $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n-k-1)}(1) = 0$ és $f^{(n-k)}(1) \neq 0$, vagyis az f-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.

PM 7.2. A reziduumtétel segítségével igazold, hogy ha K nemnegatív egész, és $a_0, a_1, \ldots, a_n$ különböző komplex számok, akkor

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j^K}{\prod\limits_{\substack{0\le k\le n\\ k\neq j}} (a_j - a_k)} = \sum_{\substack{k_0,k_1,\ldots,k_n\ge 0\\ k_0+\ldots+k_n=K-n}} a_0^{k_0} a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}.$$

(A baloldalon álló szám a z^K függvény osztott differenciája az $a_1, \ldots, a_n$ alappontokon.)