8. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. november 9.

8.1. Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 - \frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

8.2. A $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} \cdot \dfrac{1}{z}$ függvény reziduumai segítségével igazoljuk, hogy

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

8.3. Legyen $f(z)$ holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0, és nem egységnyi.

(a) Írjuk fel az f gyökeinek négyzetösszegét az egységkörben integrál alakban.

(b) Írjuk fel az f fixpontjainak számát és a fixpontok összegét az egységkörben integrál alakban.

8.4. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben.

8.5. Az $f(z)$ függvény holomorf a $B(0, 1+\varepsilon)$ körben, és az egységkörvonalat egy háromszögvonalra képezi; a háromszögvonal minden pontját egyszer veszi fel.

(a) Az argumentumelvből igazoljuk, hogy a háromszögvonal pozitív irányítású.

(b) A lokális injektivitás tételéből vezessük le, hogy $f'(z)$-nek nincs gyöke az egységkör belsejében.

Házi feladatok

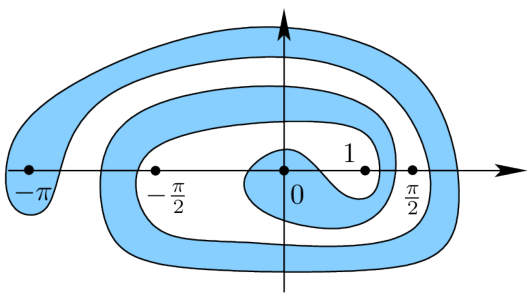
8.6. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\pi^2+1} + \frac{1}{4\pi^2+1} + \frac{1}{9\pi^2+1} + \frac{1}{16\pi^2+1} + \ldots = \frac{1}{e^2-1}.$$

8.7. Az argumentum-elvből mutassuk meg, hogy egy elliptikus (két irányban periodikus), nem konstans meromorf függvény a fundamentális paralelogrammán minden értéket és a ∞-t is (multiplicitással) ugyanannyiszor, de legalább kétszer vesz fel.

8.8. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a $\sin z = \dfrac{6z^2}{2z+1}$ egyenletnek az egységkörben.

8.9. Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \log \cos z$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. Határozzuk meg $f(-\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



(Segítség: vizsgáljuk a tartomány tükörképét is.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 27-ig

PM 8. Bizonyítsuk be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ polinom (ahol $a_n \neq 0$) gyökei $u_1, \ldots, u_n$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy ha $b_0, \ldots, b_n$ komplex számok és $|b_j - a_j| < \delta$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, és a $b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$ polinom gyökei $w_1, \ldots, w_n$, akkor az $1, \ldots, n$ indexek egy alkalmas σ permutációjára $|w_j - u_{\sigma(j)}| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.