9. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. november 16.

9.1. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan lineáris tört függvényt, amely
(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a 0, 1, ∞ pontok képe rendre 1, ∞, 0;
(b) az egységkört a jobb félsíkba képezi;
(c) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi;
(d) első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi.

9.2. Hány gyöke és hány pólusa van (multiplicitással számolva) az

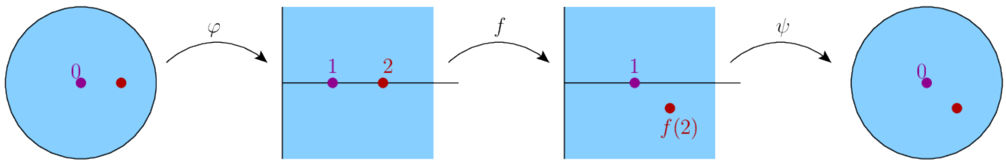
$$\frac{8z-3}{8-3z}-\frac{8}{9}z^4$$

függvénynek az $1<|z|<3$ tartományon?

9.3. Legyen $\mathbb{D}$ az egységkör, $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorf, és $a\in\mathbb{D}$ az f-nek gyöke. A maximum-elv és a Schwarz-lemma segítségével bizonyítsuk be, hogy $\left|f(z)\right|\le\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$, mégpedig

(a) a $g(z)=f(z)\cdot\dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ függvény; vizsgálatával; (b) a $h(w)=f\left(\dfrac{w+a}{1+\bar{a}w}\right)$ függvény vizsgálatával.

9.4. Legyen $J=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$ a nyílt jobb félsík. Az $f:J\to J$ függvény holomorf, és $f(1)=1$. Mi a lehetséges $f(2)$ értékek halmaza? (Komponáljuk f-et lineáris tört függvényekkel, és alkalmazzuk a Schwarz-lemmát.)



9.5. (a) Mik a komplex sík konform automorfizmusai?
(b) Mik a felső félsík konform automorfizmusai?

Házi feladatok

9.6. Legyen φ olyan lineáris tört függvény, ami az $\{z:|z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$ félkört megfelelteti az $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ negyedsíknak úgy, hogy $\varphi(\frac{1}{2})=1$.

(a) Határozd meg $\varphi(-1)$, $\varphi(1)$ és $\varphi(2)$ lehetséges értékeit közvetlenül a lineáris tört függvények tanult tulajdonságaiból.

(b) Írd fel összes ilyen tulajdonságú $\varphi(z)$-t képlettel.

9.7. Igazold, hogy ha f holomorf az egységkörben, és $|f(z)|<1$, akkor $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\dfrac{1}{1-|z|^2}$.

9.8. Legyen $ABCDE$ az egységkörbe beírt szabályos ötszög, és φ olyan konform megfeleltetés az egységkörlemezből a felső félsíkba úgy, hogy $\varphi(A)=-1$, $\varphi(B)=0$ és $\varphi(C)=1$. Mi lehet $\varphi(0)$, $\varphi(D)$ és $\varphi(E)$?
(Segítség: használjuk az ötszög forgásszimmetriáját és a kettősviszonytartást.)

9.9. Mik a Riemann-gömb konform automorfizmusai?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 4-ig

PM 9.1. Legyen $D\subset\mathbb{C}$ korlátos tartomány (nem feltétlenül egyszeresen összefüggő), $f:D\to D$ holomorf, és $z_0\in D$ fixpontja $f(z)$-nek. Igazold, hogy $|f'(z_0)|\le 1$.

PM 9.2. A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X,Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t\in[0,1]$, amire

$$|P(X+Y<t)-t|>10^{-10}.$$

(Schweitzer-verseny alapján)