

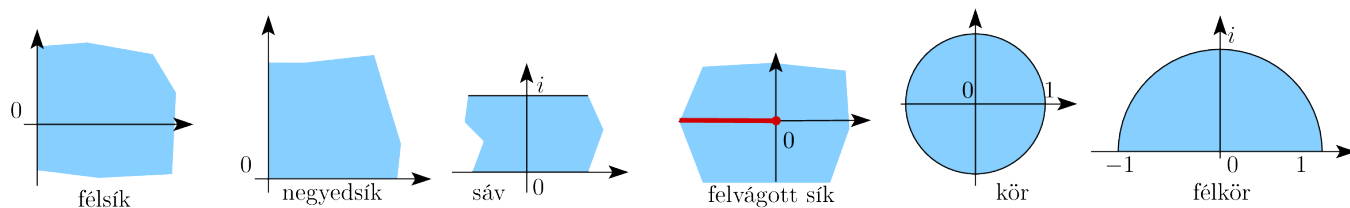
## 10. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. november 23.

**10.1.** Létezik-e olyan  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  alakú függvény, melyre alkalmas páronként különböző  $x_1, \dots, x_5$  valós számokkal  $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_4, f(x_4) = x_5, f(x_5) = x_1$  teljesül? (KöMaL B.4650.)

**10.2.** Legyen  $D \neq \mathbb{C}$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $p \in D$ , és  $f : D \rightarrow D$  olyan holomorf függvény, amire  $f(p) = p$ . Igazoljuk, hogy  $|f'(p)| \leq 1$ . (Vezessük vissza a feladatot a Schwarz-lemmára.)

**10.3.** Az  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorf függvénynek  $w_1, w_2, \dots, w_n$  különböző gyökei. Bizonyítsuk be, hogy  $|f(0)| \leq |w_1 w_2 \dots w_n|$ . (Használjunk Blaschke-szorzatot.)

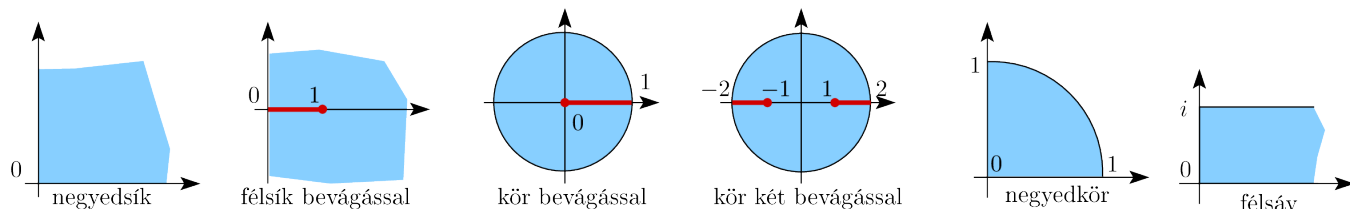
**10.4.** Keressünk az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



### Házi feladatok

**10.5.** Egy, az egész síkon meromorf függvény az egységkörvonalat önmagára képezi. Hogyan helyezkedhetnek el a gyökei és a pólusai?

**10.6.** Keress az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



**10.7.** Milyen függvények lehetnének a felső felsík Blaschke-tényezői?

### Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 11-ig

**PM 10.1.** Legyen  $P(x)$  olyan nemkonstans valós polinom, amelyre  $P(\cos t)^2 + P(\sin t)^2 = 1$ . Mutasd meg, hogy  $P(x) = \pm T_k(x)$  valamilyen páratlan pozitív egész  $k$ -val. ( $T_k$  a  $k$ -adik elsőfajú Csebisev-polinom,  $T_k(\cos t) = \cos kt$ .)

Segítség: legyen  $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$ ,  $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$ .

**PM 10.2.** Legyen  $G$  konvex tartomány, és  $f$  konform leképezés az egységkör lap és  $G$  között. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely, az egységkör lapban fekvő körlemez  $f$  szerinti képe konvex.