

11. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. november 30.

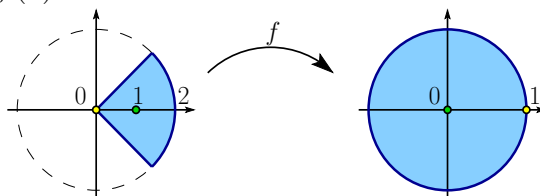
11.1. Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform leképezés az $r_1 < |z| < R_1$ és az $r_2 < |z| < R_2$ gyűrűk között.

(a) A határookra tükrözésekkel igazoljuk, hogy $f(z)$ kiterjeszthető az $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tartomány konform automorfizmusává.

(b) Mutassuk meg, hogy $f(z)$ kiterjeszthető a Riemann-gömb konform automorfizmusává.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

11.2. Legyen f az a konform leképezés, ami az $\{z : |z| < 2, |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$ körcikket az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



(a) Tükrözésekkel terjesszük ki f -et az egész Riemann-gömbön meromorf függvényé, és olvassuk le f -nek minél több értékét ($f(i)$, $f(4)$, $f(\infty)$ stb.).

(b) Hol vannak a kiterjesztett függvény gyökei és pólusai?

(c) Mutassuk meg, hogy a kiterjesztett f egy racionális törtfüggvény, és írjuk fel képlettel.

11.3. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része?

$$(x, y) \mapsto x; \quad (x, y) \mapsto x^2; \quad x^2 + y^2; \quad x^2 - y^2; \quad \log(x^2 + y^2) \quad \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x + x^2 + y^2}$$

11.4. Igazoljuk, hogy harmonikus függvény parciális deriváltjai is harmonikusak.

11.5. Ahogy azt *H. Kovács* elbeszéléséből is hallhattuk, a *Mikulás-szigetcsoport*tól körülbelül kétezer-négyszázhatvan kilométerre északra az Atlanti-óceán fenéke kilyukadt, amikor belefűrődött a *Kazincbarcika* torpedóromboló. Az elfolyó víz miatt a felszínen stabil, nem örvénylő, forgásszimmetrikus víztölcsér keletkezett.

A tengelytől közepesen nagy távolságban, ahol a vízszintcsökkenés már mérhető, de a víz függőleges irányú sebessége még sokkal kisebb, mint a vízszintes irányú sebessége, a víztölcsér mélységét közelítőleg egy harmonikus függvény írja le. Mi lehet ez a függvény?

(A Kazincbarcika torpedórombolóról és a Mikulás-szigetcsoportról Moldova György *A Lakinger Béla zsebcsirkáló* c. novellájában olvashattok bővebben.)

Házi feladatok

11.6. Igazold, hogy ha egy harmonikus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről korlátos, akkor konstans.

11.7. Bizonyítsd be, hogy ha egy kétváltozós valós polinom harmonikus, akkor egy komplex polinom valós része.

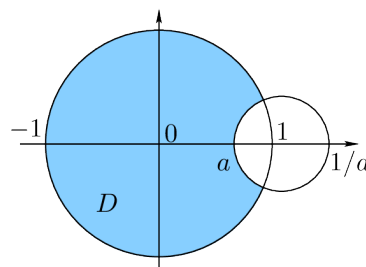
Írásban beadandó házi feladat, feltölthető a Teamsben dec. 7. 14:00-ig

BE11. Legyen a D holdacska az egységkörlemez és az $(a, 1/a)$ átmérőjű kör különbsége, és legyen f az a konform leképezés, ami D -t a jobb felső síkba viszi úgy, hogy $f(a) = \infty$ és $f(0) = 1$.

(a) Igazold, hogy f kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvényé.

(b) $f(1) = ?$

(c) A függvény gyökei és pólusai alapján írd fel f -et képlettel.

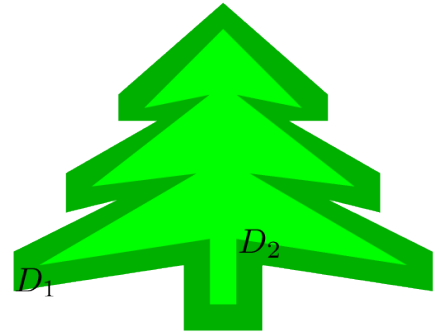


Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható dec. 18-ig

PM 11.1. Legyen D_1 az ábrán a külső, sötétebben satírozott tartomány, D_2 pedig a külső és a belső rész együtt.

Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $f : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

- (a) f analitikusan folytatható D_2 -re;
- (b) f -nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;
- (c) Bármely $g : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1 -en.



PM 11.2. Bontsuk fel a Poincaré-féle körmodellt olyan egybevágó háromszögekre, amelyeknek két 45 és egy 60 fokos szöge van, és színezzük ezeket felváltva feketére és fehérre. (Lásd M. C. Escher *Circle Limit IV — Heaven and Hell* c. fametszetét). Létezik-e olyan, az egységkörben meromorf függvény, aminek minden fekete háromszögben (denevér) pontosan egy, egyszeres gyöke van, és nincs pólusa, továbbá minden fehér háromszögben (angyal) pontosan egy, elsőrendű pólusa van, és nincs gyöke?

