

12. Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. december 7.

12.1. Mondjuk ki, és igazoljuk a következő, komplexből ismert tételek harmonikus megfelelőit: Liouville-tétel, megszüntethető szingularitások jellemzése (korlátosság), nyílt leképezés tétele.

Igaz-e harmonikus függvényekre az unicitás-tétel?

12.2. Legyen n pozitív egész és $-1 < a < 1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt =? \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt =? \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(5 + 4 \cos t)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt =?$$

12.3. A Poisson-formula levezetésének mintájára írjunk fel olyan integráltételt, amely tetszőleges, az egységkör belsejében harmonikus, a zárt körlemezen folytonos u függvény harmonikus konjugáltját állítja elő, azaz:

Ha u az egységkör belsejében harmonikus, a zárt körlemezen folytonos, akkor a

$$v(z) = \int_0^{2\pi} u(e^{it}) Q(z, t) dt \quad \text{függvénnyel, ahol} \quad Q(z, t) = \dots\dots\dots,$$

$u + iv$ a kör belsejében holomorf.

12.4. A Poisson-formula mintájára konstruáljunk olyan $\varphi : \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ magfüggvényt, amire igaz, hogy ha $h(x, y)$ harmonikus és korlátos a felső félsík belsejében, és folytonos a felső zárt félsíkon, akkor $y > 0$ esetén

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, 0) \varphi(x, y, t) dt.$$

12.5. Legyen $\mathbb{D} = \{z : 0 < |z| < 1\}$ a kilyukasztott egységkörlemez. Bizonyítsuk be, hogy ha $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonikus, akkor van olyan holomorf $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $c \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyekre

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \cdot \log |z|.$$

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 18-ig

PM 12. Legyen $a + bi \in \mathbb{D}$ rögzített komplex szám. Legfeljebb mekkora lehet $|u(a, b)|$, ha u harmonikus az egységkör belsejében, és $\int_{x^2+y^2 < 1} u^2(x, y) dx dy = \pi$?