Komplex függvénytan ZH, 2022. november 4.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

1. Mik azok a komplex számok, ahol az $f(z) = \operatorname{Im}(z^2) + \operatorname{Re} z + \overline{z}$ függvény differenciálható?

2. Fejtsd Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ függvényt a 3 körül, az $1 < |z - 3| < 2$ körgyűrűn.

3. Legyen a komplex szám.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} |z + a|^2 e^z \, \mathrm{d}z = ?$$

4. Legyen $f(z)$ az egységkör belsejében értelmezett holomorf függvény, amely nem veszi fel az 1 és a -1 értékeket. Igazold, hogy $f(z) = \cos g(z)$ egy alkalmas, holomorf $g(z)$ függvénnyel.

5. Az $f(z)$ egészfüggvényre $n = 1, 2, \ldots$ esetén $\operatorname{Im} f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \cos \dfrac{1}{n}$. Mennyi lehet $\operatorname{Im} f(-1)$?

6.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x = ?$$

7. Igazold, hogy ha $f(z)$ az egész Riemann-gömbön meromorf, vagyis véges sok pólustól eltekintve az egész síkon holomorf, és a végtelenben is vagy holomorf, vagy pólusa van, akkor $f(z)$ racionális tört függvény.

Komplex függvénytan ZH, 2022. november 4.

Megoldások

1. Mik azok a komplex számok, ahol az $f(z) = \operatorname{Im}(z^2) + \operatorname{Re} z + \overline{z}$ függvény differenciálható?

Megoldás: Cauchy–Riemann egyenletek.

$$f(x + yi) = 2xy + x + (x - yi) = (2xy + 2x) - yi;$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi) = 2xy + 2x \quad \text{és} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi) = -y.$$

A Cauchy–Riemann egyenletek szerint az f azokban a pontokban lesz komplex értelemben differenciálható, ahol

1. u és v, mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, differenciálhatók (ez mindenhol igaz, mert polinomok), és
2. teljesül, hogy $u_x = v_y$ és $u_y = -v_x$:

$$2y + 2 = -1 \quad \text{és} \quad 2x = 0;$$

$$x = 0, \quad y = -\frac{3}{2}.$$

Tehát, az f egyetlen pontban differenciálható, ez a pont a $-\frac{3}{2}i$.

2. Fejtsd Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ függvényt a 3 körül, az $1 < |z-3| < 2$ körgyűrűn.

Megoldás:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{(z-3)+2} + \frac{1}{(z-3)+1}.$$

Az első tört nevezőjében $|z-3| < 2$, a 2 a nagyobb tag, ezt emeljük ki:

$$-\frac{1}{(z-3)+2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{z-3}{2}} = \frac{-1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-3)^n.$$

A második első tört nevezőjében $|z-3| > 1$, a $z-3$ a nagyobb tag,

$$\frac{1}{(z-3)+1} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-3)^{-k-1}.$$

Tehát, az $1 < |z-3| < 2$ körgyűrűn

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-3)^n + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-3)^{-k-1}.$$

3. Legyen a komplex szám.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} |z+a|^2 e^z \,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} |z+a|^2 e^z \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} (z+a)\big(\overline{z+a}\big)e^z \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} (z+a)\left(\frac{1}{z}+\overline{a}\right)e^z \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{ae^z}{z}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \underbrace{(1+|a|^2+\overline{a}z)e^z}_{\text{holomorf}}\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{Cauchy-alaptétel}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{ae^z}{z}\mathrm{d}z + 0 \\
&\overset{\text{Cauchy-formula az } ae^z\text{-re}}{=} ae^0 + 0 = a.
\end{aligned}$$

4. Legyen $f(z)$ az egységkör belsejében értelmezett holomorf függvény, amely nem veszi fel az 1 és a -1 értékeket. Igazold, hogy $f(z) = \cos g(z)$ egy alkalmas, holomorf $g(z)$ függvénnyel.

Megoldás: Az $\cos w = f$ egyenlet megoldása

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = f$$

$$(e^{iw})^2 - 2fe^{iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} = f \pm \sqrt{f^2 - 1}.$$

Azt kell ellenőrizni, hogy a $g(z) = -i \log\left(f(z) + \sqrt{f(z)^2 - 1}\right)$ függvénynek van holomorf ága az egységkörben.

Mivel $f(z) \neq \pm 1$, a gyök alatti kifejezés, $f(z)^2 - 1$ sehol sem nulla, az egységkör egyszeresen összefüggő, ezért $(f(z)^2 - 1)$-nek létezik logaritmusa és bármilyen kitevős hatványa, speciálisan négyzetgyöke is, tehát létezik egy (pontosabban, két) holomorf $h(z) = \sqrt{f(z)^2 - 1}$ függvény.

A h sehol sem lehet 0. Ez a másodfokú egyenletből is látszik, mert a két gyök szorzata 1, de közvetlenül is ellenőrizhető: ha $h(z) = 0$, akkor $\sqrt{f(z)^2 - 1} = -f(z)$, négyzetre emelés után a $-1 = 0$ ellentmondásra jutunk. Így létezik $\log h(z)$ is, és vele együtt a $g(z) = -i \log h(z) = \arccos f(z)$ függvénynek is létezik holomorf ága.

5. Az $f(z)$ egészfüggvényre $n = 1, 2, \ldots$ esetén $\operatorname{Im} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \cos\frac{1}{n}$. Mennyi lehet $\operatorname{Im} f(-1)$?

Megoldás: Legyen $g(z) = \dfrac{f(z) - \overline{f(\overline{z})}}{2i}$; ez is egészfüggvény, és a valós tengelyen $g(x) = \operatorname{Im} f(x)$.

Továbbá legyen

$$C(z) = \cos\sqrt{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k)!},$$

ez szintén egészfüggvény.

Minden n pozitív egészre

$$g\left(\frac{1}{n^2}\right) = \operatorname{Im} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \cos\frac{1}{n} = C\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

A $g(z)$ és a $C(z)$ függvény megegyezik a 0-hoz tartó, de nemnulla $\frac{1}{n^2}$ sorozat mentén; az unicitástétel szerint $g(z) = C(z)$ minden $z \in \mathbb{C}$-re. Speciálisan a $z = -1$-re is:

$$\operatorname{Im} f(-1) = g(-1) = C(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}.$$

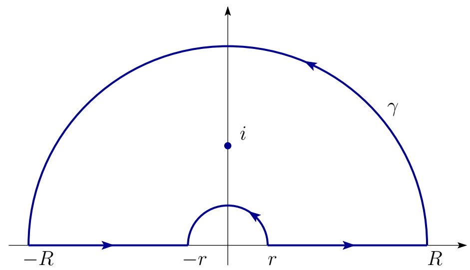
A megoldáshoz tartozik, hogy létezik a feltételeknek megfelelő függvény; ilyen például az $i \cdot C(z)$ függvény.

6.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás: Felső félkörön integrálunk. A 0-ban nincs logaritmus (az integrál a 0-ban is improprius), ezért a 0 körül is szükség lesz egy kicsi félkörre.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to+0}\int_r^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$



Integráljunk az ábrán látható γ görbén. Az argumentumot 0 és π közötti értéknek definiáljuk.

Az $[r,R]$ szakaszon az integrál $\int_r^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$. A $[-R,-r]$ szakaszon az integrál valós része ugyanez, de van egy nemnulla képzetes része is, mert $\log x = \log|x| + \pi i$.

A nagy félkörön az integrál nagyságrendje $O\left(\frac{\log R}{R^4}\cdot R\right)$, ez 0-hoz tart. A kis félkörön az integrál $O\left(\log\frac{1}{r}\cdot r\right)$, szintén 0-hoz tart.

$$\int_\gamma \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{2\log x+\pi i}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + O\left(\frac{\log R}{R^3}\right) + O\left(\log\frac{1}{r}\cdot r\right) \to \int_0^\infty \frac{2\log x+\pi i}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Ennek a valós részére van szükségünk.

A reziduumtételből (vagy közvetlenül a Cauchy-formulából)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{\log z}{(z^2+1)^2} = \operatorname*{Res}_{i=i}\frac{\frac{\log z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} = \left(\frac{\log z}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{\frac{1}{z}(z+i)^2 - \log z\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i} = \frac{4i-\frac{\pi}{2}i\cdot 4i}{16} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}i.$$

Tehát,

$$\int_0^\infty \frac{2\log x+\pi i}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}i\right) = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}i;$$

a valós részek összehasonlításából

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

7. Igazold, hogy ha $f(z)$ az egész Riemann-gömbön meromorf, vagyis véges sok pólustól eltekintve az egész síkon holomorf, és a végtelenben is vagy holomorf, vagy pólusa van, akkor $f(z)$ racionális tört függvény.

Megoldás: Legyenek a pólusok $c_1, \dots, c_n$, a c_j körüli, egy pontozott környezetben konvergens Laurent-sorfejtés $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk}(z - c_j)^k$. Ezeknek a soroknak a szinguláris rész csak véges sok tagból áll, mert $c_1, \dots, c_n$ pólusai f-nek.

Vonjuk ki $f(z)$-ből a Laurent-sorok szinguláris részét: legyen $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{jk}(z - c_j)^k$. Ezzel megszüntettük a pólusokat, g egy egészfüggvény.

A végtelenben f holomorf vagy pólusa van, tehát van véges vagy végtelen határértéke a végtelenben. Az $f(z)$-ből kivont véges sok tagnak is van határértéke a végtelenben, mégpedig 0. Ezért g-nek is van határértéke. Akkor viszont g a végtelenben holomorf, vagy pedig pólusa van.

A $g(z)$ 0-körüli hatványsora csak véges sok tagból áll, különben a ∞-ben lényeges szingularitása lenne. Teház $g(z)$ egy polinom. Akkor viszont

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{jk}(z - c_j)^k$$

racionális tört függvény.