Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. április 1.

Házi feladat volt:

7.5. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 + 4z + 3}$$

függvényt az 1 körül, az $2 < |z - 1| < 4$ halmazon.

7.6. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

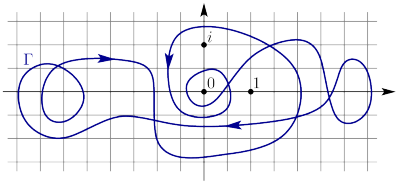
$$\frac{1}{1+e^z} \qquad \frac{e^z}{(z^2-1)^3} \qquad \frac{e^z - z^3 + 8}{z^2+1} \qquad \frac{e^z}{z^2+4} \qquad \frac{e^z}{(z^2+4)^2}$$

7.7.

$$\text{(a)} \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 - 3z + 2} \mathrm{d}z = ? \qquad \text{(b)} \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{\sin^3 z} \mathrm{d}z = ?$$

Új gyakorló feladatok:

8.1. $$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z = ?$$



8.2. $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+1} \mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk első félkörön.)

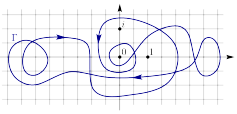
8.3.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} \mathrm{d}x = ?$$

Integráljunk egy 120 fokos szögtartomány határán.

Házi feladatok

8.4. Legyen f egészfüggvény. Fejezd ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2 \cos z} \mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(\pi/2)$ stb. segítségével.



8.5. $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{12}+1} = ?$$

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható április 22-ig

PM8. Legyen n pozitív egész szám, és φ egészfüggvény. Tetszőleges $X > 0$ valós szám esetén legyen

$$f(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s) \cdot X^s}{s(s-1)(s-2) \cdot \ldots \cdot (s-n)} \mathrm{d}s.$$

(a) Igazoljuk, hogy $f(X)$ polinom.

(b) Milyen integrálok állítják elő f deriváltjait?

(c) Mutassuk meg, hogy ha φ polinom, és $\deg \varphi = k < n$, akkor $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n-k-1)}(1) = 0$ és $f^{(n-k)}(1) \neq 0$, vagyis az f-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.