Matematika problémamegoldó szeminárium, 2022. február 11.

1.1. Egy papírlapra felírtuk a számokat 1-től 2009-ig. A második lépésben mindegyik szám kétszeresét is felírtuk a papírra, majd kiradíroztuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepeltek. Ezt a lépést ismételgetjük olyan módon, hogy az i-edik lépésben az $1, 2, \ldots, 2009$ számok mindegyikének i-szeresét is felírjuk a papírra, majd kiradírozzuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepelnek. Hány szám lesz a papírlapon a 2009. lépés után?

(KöMaL B.4192.)

1.2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Melyik állítás igaz/hamis?
(a) Ha f folytonos és $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, akkor f monoton.
(b) Ha f monoton és $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, akkor f folytonos.
(c) Ha f monoton és f folytonos, akkor $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

1.3. Hány olyan x pozitív egész létezik, amire

1. $x < 10^{2007}$ és
2. $x^2 - x$ osztható 10^{2007}-nel?

1.4. Igazoljuk, hogy ha egy racionális törtfüggvény végtelen sok egész helyen egész, akkor polinom.

1.5. Tetszőleges síkbeli A véges ponthalmazra jelölje $v(A)$ az A halmaz egy háromszögelésében található háromszögek számát, és legyen

$$A + A = \{x + y \mid x, y \in A\},$$

ahol két pont összege alatt azt a pontot értjük, amelynek helyvektora az összeadandók helyvektorának összege. Bizonyítsuk be, hogy

$$v(A + A) \geq 4v(A).$$

(KöMaL B.4200.; Ruzsa Imre)

1.6. Legyenek $a, b, c, d, e > 0$ valós számok, amikre $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ és $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$. Melyik nagyobb? $a^3 + b^3 + c^3$, vagy $d^3 + e^3$?

1.7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n és $a > b$ pozitív egészek esetén $\varphi(a^n - b^n)$ osztható n-nel.

1.8. Keressük meg az összes olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozatot, amire $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ és a következő állítás teljesül:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható és $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ valós számok úgy, hogy $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$, akkor létezik olyan $h \in (x_0, x_n)$, amire

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \ldots + a_n f^{(n)}(h) = 0.$$

1.9. Legyen $a_0 = a_1 = 1$, $(n + 1)a_{n+1} = (2n + 1)a_n + 3na_{n-1}$. Mutassuk meg, hogy a sorozat egész számokból áll.

(KöMaL N.149.)

1.10. (Angolul, írásban beadható) Let A be an $n \times n$-matrix with integer entries and $b_1, \ldots, b_k$ be integers satisfying $\det A = b_1 \cdot \ldots \cdot b_k$. Prove that there exist $n \times n$-matrices $B_1, \ldots, B_k$ with integer entries such that $A = B_1 \cdot \ldots \cdot B_k$ and $\det B_i = b_i$ for all $i = 1, \ldots, k$.