1. Valós analízis gyakorlat, 2023. szeptember 15.

1.1. Megnyugtatásul közlöm, hogy hamisnak bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, miszerint mégsem tévedés tagadni, hogy ha a gyakorlatvezető – a hírével ellentétben – mégsem egy szemét, akkor lesz olyan vizsgázó, akinek egyetlen valós analízis tétel bizonyítását sem kell tudnia ahhoz, hogy ne bukjon meg.

1.2. Magyarázzuk meg a beszélgetést!

Kapitány: Elég lesz az üzemanyag a leszálláshoz, vagy lezuhanunk?
Számítógép: Igen.
Kapitány: Igen, de *MI*?!!
Számítógép: Igen, *Uram*. (Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?)

1.3.

„Minden asszony életében jön [van] egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad."

(Szenes Iván – Vértes László – Hofi Géza; `https://www.youtube.com/watch?v=va1UozD3Gu4`)

Írjuk fel a fenti állítást kvantorokkal, negáljuk, majd fogalmazzuk meg a tagadást szövegesen is. Plusz pontért zenésítsük meg, és adjuk elő, lehetőleg többszólamú háttérvokállal.

Segítség: legyen A, T és P az asszonyok, a tevékenységek, illetve a pillanatok halmaza, `akarja`(a, t, p) jelentse azt, hogy az a asszony a t tevékenységet a p pillanatban meg akarja tenni vagy sem.)

> *"Édesapám már réges-rég kirúgta volna édesanyámat, (...) annyira borzolta az idegét édesanyám gondolkodásának a módja, a logikának és a rációnak a lenézése, az még csak hagyján, hogy anyám képtelen az olyan jellegű állítások negálására, mint hogy „minden asszony életében van egy olyan pillanat, amikor azt tenné, amit nem szabad", de ez a föladat, ez a kihívás ábszolúte hidegen is hagyja, halálosan nem érdekli, milyen asszony?, mit nem szabad?, és megint viharosan vonogatja a vállát és miákol, míííért, (...)"*
>
> (Esterházy Péter: Harmonia caelestis)

1.4. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg} 1°$ irracionális.

1.5. Alkalmas számok számtani és mértani közepei segítségével határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet x^2y, ha $x, y \geq 0$, és (a) $2x + y = 10$; (b) $x + 3y = 10$.

1.6. A Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével mutassunk példát olyan N_0 számra, amellyel bármely $n > N_0$ egész esetén $1.01^{\sqrt{n}} > n$.

1.7. $A_1, A_2, \ldots$ logikai állítások (tehát mindegyik vagy igaz, vagy hamis). Mit mondhatunk, ha

(a) $A_1 \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}\ (A_n \Rightarrow A_{n+1})\big)$?

(b) $A_1 \wedge \Big(\forall n \in \mathbb{N}\ \big(A_n \Rightarrow (A_{n+1} \wedge A_{n+2})\big)\Big)$?

(c) $A_1 \wedge \Big(\forall n \in \mathbb{N}\ \big((A_n \vee A_{n+1}) \Rightarrow A_{n+2}\big)\Big)$?

(d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \Big((\neg A_n) \Rightarrow \big(\exists k \in \mathbb{N}\ ((k < n)\ \wedge\ (\neg A_k))\big)\Big)$?

1.8. Bizonyítsuk be a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a következőképpen.

Legyen A_n az egyenlőtlenség n tagra.

Ellenőrizzük $A_!$-et és A_2-t, és igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n-re $A_n \Rightarrow A_{2n}$ és $A_{n+1} \Rightarrow A_n$.

Házi feladatok

1.9. Tegyük fel, hogy

1. Nem mindenki hullamosó, aki szereti a spenótot;
2. Minden Fradi-szurkoló hullamosó, de legalábbis nem szereti a spenótot;
3. Vagy az igaz, hogy aki nem hullamosó, az Fradi-szurkoló, vagy pedig az, hogy aki hullamosó, az nem Fradi-szurkoló.

Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem Fradi-szurkoló?

(Pósa L.; KöMaL F. 2001., 1975. december alapján)

1.10. Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + 2b + 3c = 5$?

1.11. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget.

1.12. A Bernoulli-egyenlőtlenség vagy a binomiális tétel segítségével mutassunk példát olyan N_0 számra, amellyel bármely $n > N_0$ egész esetén $1{,}001^n > n^{10}$.

1.13. Olvassátok el a *Hogyan fogjunk oroszlánt?* c. cikket: `https://www.komal.hu/cikkek/kg/oroszlan/oroszlan.h.shtml`

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A teamsben feltölthető szept. 27. éjfélig

PM1.1. Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy n-változós logikai függvény. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény akkor és csak akkor írható fel csupán a változójelek, zárójelek és az implikáció művelet ($\Rightarrow$) felhasználásával, ha

$$\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\} \Big(\forall x_1, \ldots, x_n \ \big(x_k \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\Big).$$