2. Valós analízis gyakorlat, 2023. szeptember 18.

2.1. Legyenek A és B_i tetszőleges halmazok az I indexhalmaz minden i elemére.

(a) Igazoljuk, hogy $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$.

(b) Igazoljuk, hogy ha I nemüres, akkor $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$. Miért kell feltenni, hogy I nem üres?

2.2. Legyen $f : A \to B$. Igaz-e, hogy
(a) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$?
(b) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$?
(c) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$?
(d) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$?
(e) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$?
(f) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \setminus Y)$?
Igazak-e ugyanezek injektív, illetve szürjektív függvényekre?

2.3. (a) A különlegesen kiképzett J. English ügynök, aki akár a fülével is tud ölni, és szabad idejében az eliminátumait szokta számolgatni, csak az ehhez szükséges természetes számokat és az összeadást ismeri. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(b) A mesterséges intelligenciával felvértezett kínai szőkenő-robot az egész számokat és az összeadást ismeri. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(c) Az Io-lakó (Az Io a Jupiter egyik holdja) számára a valós számok a $\{I, O\}$ halmazból állnak, és a modulo 2 összeadást ismeri: $O \oplus O = O$, $O \oplus I = I$, $I \oplus O = I$, és $I \oplus I = O$. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában? Definiálható-e számára szorzás úgy, hogy teljesüljenek a testaxiómák? Teljesíthetők-e a rendezési axiómák?

(d) A komplex számokra, mely test axiómák teljesülnek? Megadható-e a rendezési axiómáknak eleget tevő rendezés?

2.4. Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

2.5. Legyen F test, és $F[x]$ az F feletti polinomok gyűrűje. A polinomokból készített $a(x)/b(x)$ és $c(x)/d(x)$ formális törteket nevezzük ekvivalensnek (jelben $a/b \sim c/d$, ha $a(x)d(x) = b(x)d(x)$.

(a) Mutassuk meg, hogy a $\sim$ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz $a \sim a$, $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ és $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)$. Igazoljuk, hogy a formális törtek halmaza diszjunkt halmazokra (ekvivalencia-osztályokra) bontható úgy, hogy két tört akkor és csak akkor van ugyanabban az ekvivalencia-osztályban, ha ekvivalensek.

A törtek ekvivalencia-osztályait nevezzük F feletti racionális tört függvényeknek.

(b) Mi legyen két racionális tört összege, illetve szorzata?

(c) Igazoljuk, hogy a racionális törtek testet alkotnak. (A jele: $F(x)$.)

Házi feladatok

2.6. Legyen $f : A \to B$, és legyenek X_i $(i \in I)$ egy B részhalmazaiból álló halmazrendszer. Igaz-e biztosan, hogy

(a) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(X_i)$? (b) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(X_i)$?

2.7. Ellenőrizzük, hogy a valós számok halmazán az $a \oplus b = a + b + 1$ művelet kielégíti az első négy axiómát. Mi lesz a nullelem? Adjunk meg olyan „szorzást", $a \odot b$-t, amellyel együtt testet kapunk.

2.8. (a) Az $\mathbb{R}(x)$ rendezett testben mely törtek osztályai felelnek meg a valós számoknak?

(b) Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(b1) Minden valós számnál van nagyobb racionális tört.

(b2) Minden nagyobb racionális törtnél van nagyobb valós szám.

(b3) Minden pozitív valós számnál van kisebb pozitív racionális tört.

(b4) Minden pozitív racionális törtnél van kisebb pozitív valós szám.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

A teamsben feltölthető szept. 27. éjfélig

PM2.1. Legyen H halmaz, és $f : P(H) \to P(H)$ monoton növő halmazfüggvény, azaz $X \subset Y \subset H$ esetén $f(X) \subset f(Y) \subset H$. Nevezzünk egy $X \subset H$ halmazt *felfúvódó*nak, ha $X \subset f(X)$, illetve *leeresztő*nek, ha $X \supset f(X)$. Egy X halmaz *fixpontja* f-nek, ha $f(X) = X$.

Legyen A a felfúvódó halmazok uniója, és B a leeresztő halmazok metszete.

(a1) Értelmesek-e ezek a definíciók?

(a2) Felfúvódó/leeresztő/fixpont-e az A és a B halmaz?

(a3) Felfúvódó/leeresztő/fixpont-e a $f(A)$ és a $f(B)$ halmaz?

(b) Bizonyítsuk be a Cantor-Schröder-Bernstein tételt: ha léteznek injektív $A \to B$ és $B \to A$ függvények, akkor létezik $A \to B$ bijekció is.

(c) Legyen $A = (0, \infty)$, $B = [0, \infty)$, $f : A \to B$, $f(x) = x$, $g : B \to A$, $g(x) = x + 1$. Milyen $A \to B$ bijekciót konstruál a Cantor-Schröder-Bernstein tétel fenti bizonyítása?