3. Valós analízis gyakorlat, 2023. szeptember 19.

3.1. (a) A különlegesen kiképzett J. English ügynök, aki akár a fülével is tud ölni, és szabad idejében az eliminátumait szokta számolgatni, csak az ehhez szükséges nemnegatív egész számokat és az összeadást ismeri. Mely test- illetve rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(b) A mesterséges intelligenciával felvértezett kínai szőkenőrobot az egész számokat és az összeadást ismeri. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában?

(c) Az Io-lakó (Az Io a Jupiter egyik holdja) számára a valós számok a $\{I, O\}$ halmazból állnak, és a modulo 2 összeadást ismeri: $O \oplus O = O$, $O \oplus I = I$, $I \oplus O = I$, és $I \oplus I = O$. Mely test ill. rendezési axiómák teljesülnek a világában? Definiálható-e számára szorzás úgy, hogy teljesüljenek a testaxiómák? Teljesíthetők-e a rendezési axiómák?

(d) Mely test axiómák teljesülnek a komplex számokra? Megadható-e a rendezési axiómáknak eleget tevő rendezés?

3.2. Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

3.3. Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Mi a felső, illetve alsó korlátaik halmaza? Mi a maximumuk, a minimumuk, a szuprémumuk és az infimumuk?

$$\emptyset \qquad \{1, 2, 3, \dots\} \qquad \left\{\tfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \qquad [1, 2) \qquad (2, 3] \qquad [1, 2) \cup (2, 3]$$

3.4. Igazoljuk, hogy minden valós számnál van nagyobb 2-hatvány.

3.5. Milyen rendezett testekben értelmezhetjük az egészrészfüggvényt?

3.6. Nevezzünk egy $x \in [1, 2]$ számot *egérnek*, ha $x^2 < 2$, *elefántnak*, ha $x^2 > 2$, illetve *oroszlánnak*, ha $x^2 = 2$.

(a) Bizonyítsuk be az $[1, 2]$ intervallum felezgetésével, hogy az intervalumban van oroszlán.

(b) Mutasssuk meg, hogy az egerek szuprémuma és az elefántok infimuma egyenlő, és sem nem egér, sem nem elefánt, vagyis oroszlán.

Házi feladatok

3.7. A rendezési axiómákat és az egyenlőtlenségre vonatkozó definíciókat használva mutassuk meg, hogy $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

3.8. Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy
(a) $\inf H < \sup H$; (b) $\inf H = \sup H$; (c) $\inf H > \sup H$?

3.9. Az *1-dimenziós Helly-tétel* szerint ha $[a_i, b_i]$ $(i \in I)$ korlátos, zárt intervallumok egy nem-üres rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek van közös pontja, akkor az összes $[a_i, b_i]$ intervallumnak is van közös pontja.

Bizonyítsuk be az 1-dimenziós Helly-tételt a legkisebb felső korlát tételéből. (Vizsgáljuk az alsó végpontok halmazát.)

3.10. (a) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

(c) Igaz-e az 1-dimenziós Helly-tétel a racionális számok testében?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható okt. 7-ig

PM3.1. Legyen $\mathbb{R}(x)$ a valós együtthatós racionális törtek teste (racionális tört: két polinom hányadosa, de az egyszerűsítéssel és bővítéssel egymásba alakítható törteket evivalenseknek tekintjük, tehát valójában a törtek *ekvivalenciaosztályairól* van szó, ugyanúgy, mint a racionáls számoknál). Egy racionális tört pozitív, illetve negatív, ha a számláló és a nevező főegyütthatója azonos, illetve ellentétes előjelű; bármely $f, g \in \mathbb{R}(x)$ esetén $f < g$ akkor, ha $g - f > 0$. Ezzel a relációval $\mathbb{R}(x)$ egy rendezett test.

(a) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}(x)$-ben nem teljesül az Arkhimédészi axióma.
(b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}(x)$-ben nem teljesül a Cantor-axióma.
(c) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}(x)$-ben nem teljesül a legkisebb felső korlát tétele.
(d) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}(x)$-ben nem teljesül az 1-dimeniós Helly-tétel.
(e) Mutassunk $\mathbb{R}(x)$-ben olyan halmazt, ami konvex, de nem intervallum.
(f) Mutassunk $\mathbb{R}(x)$-ben olyan pozitív elemet, aminek nincs négyzetgyöke.