4. Valós analízis gyakorlat, 2023. szeptember 25. 16^{05}–17^{39}

4.1. Újra: Legyen $k \geq 2$ egész szám. Nevezzünk egy $x \in [1, 2]$ számot *egérnek*, ha $x^k < 2$, *elefántnak*, ha $x^k > 2$, illetve *oroszlánnak*, ha $x^k = 2$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy bármelyik egér kisebb, mint bármelyik elefánt.

(b) Bizonyítsuk be, hogy minden egérnél van nagobb egér.

(c) Bizonyítsuk be, hogy minden elefántnál van kisebb elefánt.

(d) Mutasssuk meg, hogy az egerek szuprémuma sem nem egér, sem nem elefánt, vagyis oroszlán.

4.2. Az előadáson számtani–mértani közepekkel bizonyítottuk, hogy az $(1+\frac{1}{n})^n$ sorozat szigorúan monoton nő. Ennek mintájára, mértani–harmonikus közepekkel igazoljuk, hogy az $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökken.

4.3. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \ldots$ valós számokból álló sorozat. Írjuk fel kvantorokkal a következő állításokat.

(a) $a_n \to 2$;

(b) $a_n \not\to 2$;

(c) az a_n sorozat konvergens;

(d) az a_n sorozat divergens.

4.4. Számítsuk ki a $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ határértéket. Mutassunk tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megfelelő n_0 küszöbindexet.

4.5. A Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével igazoljuk, hogy $\sqrt[n]{3} \to 1$.

4.6. Igaz vagy hamis? (Bizonyítsuk be, vagy mutassunk ellenpéldát.)

(a) Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor az $(|a_n|)$ sorozat is konvergens.

(b) Ha az $\big(|a_n|\big)$ sorozat konvergens, akkor az (a_n) sorozat is konvergens.

(c) Ha az (a_n) sorozat monoton, akkor konvergens.

(d) Minden konvergens sorozatnak van legkisebb tagja.

(e) Minden konvergens sorozatnak van legnagyobb tagja.

(f) Minden konvergens sorozatnak van legkisebb vagy legnagyobb tagja.

Házi feladatok

4.7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy nemnegatív számokból álló sorozat 0-hoz tart, akkor van legnagyobb eleme.

4.8. Igazoljuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

4.9. Olvassuk el a *Miért természetes az e?* c. cikket.
(`http://www.komal.hu/cikkek/kg/e/e.h.shtml`)