5. Valós analízis gyakorlat, 2023. szeptember 26. 16^{05}–17^{39}

5.1. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $K = 10^6$-hoz, illetve $K = -10^6$-hoz.

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n}; \qquad \sqrt{n+1}-n$$

5.2. Mi az alábbi sorozatok határértéke?

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \qquad \left(\frac{1+\log 2}{n}\right)^n \qquad \sqrt[n]{1+2+3+\ldots+n} \qquad \sqrt[n]{2^n+n}$$

5.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \geq 0$, és $a_n \to b$, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{b}$.

5.4. Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Igazoljuk, hogy

(a) Az sorozat monoton nő;

(b) A sorozat korlátos;

(c) A sorozat határértéke csak a 2 lehet.

(d) Legyen $y_n = |x_n - 2|$. Mutassuk meg, hogy $y_{n+1} < \frac{|y_n|}{3}$.

5.5.

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = ? \qquad \lim\left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)^n = ?$$

Házi feladatok

5.6. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $K = 10^6$-hoz, illetve $K = -10^6$-hoz.

$$n^2 - n^3; \qquad n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right); \qquad \sin n$$

5.7.

$$\lim \sqrt[n^2]{1^2+2^n+3^n+\ldots+n^n} = ? \quad \lim \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} = ?$$

5.8. Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{6}{5-x_n}$. $\lim x_n = ?$

5.9.

$$\lim\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n-4} = ?$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható okt. 14-ig

PM5.1. Azt mondjuk, hogy az $A = (a_1, a_2, \ldots)$ pozitív számokból álló sorozat nagyságrendje nagyobb, mint a $B = (b_1, b_2, \ldots)$ pozitív számokból álló sorozaté, ha $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$. Ennek jelölése lehet pl. $A \gg B$, $(a_n) \gg (b_n)$ vagy $a_n \gg b_n$.

(a) Legyen $A^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots)$, $A^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots)$, $A^{(3)} = (a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots)$, $\ldots$ pozitív számokból álló sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan, szintén végtelenhez tartó C sorozat, amelynek nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $A^{(i)}$ sorozat nagyságrendje.

(b) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ végtelenhez tartó sorozatok egy tetszőleges sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan, szintén végtelenhez tartó C sorozat, amelyre $\forall i\ C \ll A^{(i)}$.

(c) Legyen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$, illetve $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \ldots$ pozitív számokból álló sorozatok egy-egy sorozata úgy, hogy $\forall i, j\ A^{(i)} \ll B^{(j)}$. Igazoljuk, hogy létezik olyan C sorozat, amelyre $\forall i, j\ A^{(i)} \ll C \ll B^{(j)}$.