## 6. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 2. $16^{05}$–$17^{39}$

**6.1.**

$$\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = ? \qquad \lim \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)^n = ? \qquad \lim \frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+2)^3}}{\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n^4+2)}}} = ?$$

**6.2.** Mutassunk példákat olyan $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatokra, amelyekre
(a) $a_n - b_n \to 0$, de $a_n/b_n$ nem tart 1-hez;
(b) $a_n/b_n \to 1$, de $a_n - b_n$ nem tart 0-hoz.

**6.3.** Igaz vagy hamis?
(a) Ha az $(a_n)$ sorozat monoton, akkor van határértéke.
(b) Ha az $(a_n)$ sorozat konvergens, akkor van monoton részsorozata.
(c) Minden végtelenhez tartó sorozatnak van legkisebb tagja.

**6.4.** Mik az alábbi sorozatok sűrűsödési pontjai? Mi a limesz superioruk és limesz inferioruk?

$$a_n = n; \quad b_n = (-1)^n; \quad c_n = \left\{\sqrt{2}\cdot n\right\}$$

**6.5.** (a) Igazoljuk, hogy ha $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ valós számsorozatok, és $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \le b_n$, akkor

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \quad \text{és} \quad \limsup a_n \le \limsup b_n.$$

(b) Igazoljuk, hogy ha $\limsup a_n < \liminf b_n$, akkor $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n < b_n$.
(c) Igaz-e, hogy ha $\limsup a_n \le \liminf b_n$, akkor $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \le b_n$?

**6.6.** Legyen $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ két, nemnegatív számokból álló sorozat. Rakjuk sorba nagyság szerint:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}(a_n+b_n); \quad \overline{\lim}(a_n+b_n)$$

Mutssunk példát, amikor ezek mind különbözők.

### Házi feladatok

**6.7.**

$$\lim \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n-4} = ? \qquad \lim \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)^{n^2} = ?$$

**6.8.** Mutassuk meg, hogy bármely $(c_n)$ számsorozathoz találhatók olyan $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok, amelyekre $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, és $a_n \cdot b_n = c_n$.