7. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 3. 16^{05}–17^{39}

7.1. Mutassunk példát olyan korlátos, divergens a_n sorozatra, amelyre $a_{n+1} - a_n \to 0$.

7.2. (a) Igazoljuk, hogy ha $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ valós számsorozatok, és elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, akkor

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \quad \text{és} \quad \limsup a_n \le \limsup b_n.$$

(b) Igazoljuk, hogy ha $\limsup a_n < \liminf b_n$, akkor elég nagy n esetén $a_n < b_n$.
(c) Igaz-e, hogy ha $\limsup a_n \le \liminf b_n$, akkor elég nagy n esetén $a_n \le b_n$?

7.3. Legyen $(x_1, x_1, \ldots)$ számsorozat, $\liminf x_n = A$ és $\limsup x_n = B$.
(0) Igazoljuk, hogy tetszőleges $a < A$ és $b > B$ esetén

$$a \le \liminf \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \limsup \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le b.$$

(1) Igazoljuk, hogy

$$\liminf x_n \le \liminf \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \limsup \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \limsup x_n.$$

(2) Bizonyítsuk be, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots$ valós számsorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim x_n.$$

7.4. Legyen $(a_1, a_1, \ldots)$ és $(b_1, b_2, \ldots)$ két, nemnegatív számokból álló sorozat. Rakjuk sorba nagyság szerint:

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n; \quad \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n; \quad \underline{\lim}(a_n + b_n); \quad \overline{\lim}(a_n + b_n)$$

Mutassunk példát, amikor ezek mind különbözők.

7.5. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $(-1)^n$ és a $(-1)^n/\sqrt{n}$ sorozatokra.

Házi feladatok

7.6. Mutassuk meg, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

7.7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to b$.

7.8. Bizonyítsuk be a Bolzano-Weierstrass tételt intervallumfelezéssel.

7.9. Olvassok el *Az irigy törpe és a Bölcsesség Köve* c. mesét pl. itt:
`http://www.komal.hu/cikkek/egyeb/torpe/torpe.h.shtml`
vagy hallgassátok meg itt: `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/IrigyTorpe.mp3`
(a) Hova lettek az irigy törpe színes kövei?
(b) Hol volt az irigy törpe pontosan este 10, illetve este 11 órakor?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható okt. 21-ig

PM7.1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett testben igaz a Bolzano–Weierstrass tétel, akkor testben igaz a legkisebb felső korlát tétele is.

PM7.2. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén. (IMO 1985/6)