9. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 10. 16^{05}–17^{39}

9.1. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.

$$\frac{n!}{n^n}; \qquad \frac{n^n}{(2n)!}; \qquad n - \ln(n!)$$

9.2. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $(-1)^n$ és a $(-1)^n/\sqrt{n}$ sorozatokra.

9.3.

$$\mathbb{R}' = ? \quad \mathbb{Q}' = ? \qquad \mathbb{Z}' = ?$$

9.4. Bizonyítsuk be, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont, avagy bármely $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ halmaz esetén $(A')' \subset A'$.

9.5. Ellenőrizzük a határérték definícióját és a Cauchy-kritériumot; adjunk meg tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

$$(a) \quad \lim_{x\to 2} x^3; \qquad (b) \quad \lim_{t\to 3} \{t\}; \qquad (c) \quad \lim_{\xi\to -\infty} \cos\xi$$

9.6.

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{\eta + \sin\eta}{\sqrt{\eta^2+1}} = ? \qquad \lim_{\zeta\to 3} \frac{\sqrt{\zeta+13} - 2\sqrt{\zeta+1}}{\zeta^2 - 9} = ? \qquad \lim_{\omega\to 1} \frac{\omega^{100} - 2\omega + 1}{\omega^{50} - 2\omega + 1} = ?$$

Házi feladatok

9.7. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a = \frac{1}{25}; \qquad (b) \quad g(y) = \frac{\sqrt{y}}{y+1}, \quad a = 4.$$

9.8.

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = ?$$

9.9. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, akkor f azonosan 0.

9.10. (a) Hogyan definiálhatnánk egy függvény limesz szuprémumát és limesz inferiorát egy pontban?

(b) Definiáljuk egy függvény limesz inferiorát mínusz végtelenben.

(c) Mi lehetne a függvények limesz szuprémumára és limesz inferiorára vonatkozó átviteli elv?

(d) Hogyan definiálhatnánk egy függvény alulról, illetve felülről félig folytonosságát egy pontban?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható okt. 28-ig

PM9.1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész a és egész b, c esetén $ae + b + \frac{c}{e} \neq 0$, ezért az e szám nem gyöke semmilyen egész együtthatós, másodfokú polinomnak.