10. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 16. 16^{05}–17^{39}

10.1. Ellenőrizzük a határérték definícióját és a Cauchy-kritériumot; adjunk meg tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

$$(a) \quad \lim_{x\to 2} x^3; \qquad (b) \quad \lim_{t\to 3}\{t\}; \qquad (c) \quad \lim_{\xi\to -\infty} \cos\xi$$

10.2.

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{\eta+\sin\eta}{\sqrt{\eta^2+1}} =? \qquad \lim_{\zeta\to 3} \frac{\sqrt{\zeta+13}-2\sqrt{\zeta+1}}{\zeta^2-9} =? \qquad \lim_{\omega\to 1} \frac{\omega^{100}-2\omega+1}{\omega^{50}-2\omega+1} =?$$

10.3. (a) Hogyan definiálhatnánk egy függvény limesz szuprémumát és limesz inferiorát egy pontban?

(b) Definiáljuk egy függvény limesz inferiorát mínusz végtelenben.

(c) Mi lehetne a függvények limesz szuprémumára és limesz inferiorára vonatkozó átviteli elv?

(d) Hogyan definiálhatnánk egy függvény alulról, illetve felülről félig folytonosságát egy pontban?

10.4. Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x-1}$ határértéket, ha (a) α pozitív egész; (b) α pozitív racionális; (c) $\alpha = \sqrt{2}$.

10.5. A Cauchy-kritérium segítségével bizonyítsuk be, hogy ha $f : (0,1) \to (0,\infty)$, és minden x, y-ra $f(x) < (1+y)f(y)$, akkor f-nek véges jobboldali határértéke van a 0-ban.

Házi feladatok

10.6. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs jó δ.

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a = \frac{1}{25}; \qquad (b) \quad g(y) = \frac{\sqrt{y}}{y+1}, \quad a = 4.$$

10.7.

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} =? \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^{\sqrt{2}}-1}{x^\pi - 1} =? \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{a}{x^a-1} - \frac{b}{x^b-1}\right) =?$$

10.8. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, akkor f azonosan 0.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható okt. 28-ig

PM 10. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és tetszőleges $a > 0$ esetén $f(n \cdot a) \to 0$. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\infty} f = 0$.