11. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 17. 16^{05}–17^{39}

11.1. Legyen $D(x)$ a *Dirichlet-függvény*:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Mik a Dirichlet-függvény periódusai? (b) $\lim_{x\to 0} D(x) = ?$ (c) $\lim_{x\to\sqrt{2}} D(x) = ?$

11.2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonosak az a pontban, akkor a $\max\big(f(x), g(x)\big)$ és a $\min\big(f(x), g(x)\big)$ függvény is folytonos az a pontban.

11.3. (a) Hogyan definiálhatnánk egy függvény limesz szuprémumát és limesz inferiorát egy pontban?
(b) Definiáljuk egy függvény limesz inferiorát mínusz végtelenben.
(c) Mi lehetne a függvények limesz szuprémumára és limesz inferiorára vonatkozó *átviteli elv*?
(d) Hogyan definiálhatnánk egy függvény *alulról*, illetve *felülről félig folytonosságát* egy pontban?

11.4. Számítsuk ki a $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x-1}$ határértéket, ha (a) α pozitív egész; (b) α pozitív racionális; (c) $\alpha = \sqrt{2}$.

11.5. A Cauchy-kritérium segítségével bizonyítsuk be, hogy ha $f : (0,1) \to (0,\infty)$, és minden x, y-ra $f(x) < (1+y)f(y)$, akkor f-nek véges jobboldali határértéke van a 0-ban.

Házi feladatok

11.6.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\sqrt{2}} - 1}{x^\pi - 1} = ? \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{a}{x^a - 1} - \frac{b}{x^b - 1} \right) = ?$$

11.7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus, és $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, akkor f azonosan 0.

11.8. Az f függvény *Lipschitz tulajdonságú*, ha $\exists K \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in D(f) \ \ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$.
(a) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz egy nyílt intervallumban, akkor ott folytonos is.
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz tulajdonságú az $(0,1)$ intervallumban, akkor $\lim_{+0} f$ létezik és véges. (Használjuk a Cauchy-kritériumot.)

11.9. Legyen $R(x)$ a *Riemann függvény*:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{ha } x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N};\ p \text{ és } q \text{ relatív prímek}; \\ 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Mik a Riemann-függvény periódusai? (b) $\lim_{x\to 0} R(x) = ?$ (c) $\lim_{x\to\sqrt{2}} R(x) = ?$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható nov. 11-ig

PM 11. Két hegymászó az $y = H(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $H : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, és $H(0) = H(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0,0)$, a másik az $(1,0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?

(Avagy: léteznek-e biztosan olyan $f, g : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1)$, és minden $t \in [0,1]$ pillanatban $H(f(t)) = H(g(t))$?)