12. Valós analízis gyakorlat, 2023. október 24. 16^{05}–17^{39}

12.1. Az f függvény *Lipschitz tulajdonságú*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in D(f)\ \ |f(x)-f(y)| \le K|x-y|$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz egy nyílt intervallumban, akkor ott folytonos is.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz tulajdonságú az $(0,1)$ intervallumban, akkor $\lim\limits_{+0} f$ létezik és véges. (Használjuk a Cauchy-kritériumot.)

12.2. Igazoljuk közvetlenül és az átviteli elvvel is, hogy ha f monoton növekvő az (a,b) intervallumon, akkor $\lim\limits_{a+0} f = \inf\limits_{(a,b)} f$ és $\lim\limits_{b-0} f = \sup\limits_{(a,b)} f$.

12.3. (a) Lehet-e egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szakadási pontjainak torlódási pontja folytonossági pont?

(b) Lehet-e ugráshelyek limesze ugráshely?

(b) Lehet-e ugráshelyek limesze másodfajú szakadási hely?

(c) Lehet-e másodfajú szakadási helyek limesze ugráshely?

(d) Lehet-e másodfajú szakadási helyek limesze másodfajú szakadási hely?

(e) Lehet-e szigorú lokális minimumhelyek limesze szigorú lokális maximumhely?

12.4. Van-e olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek mindenhol ∞ a határértéke?

Házi feladatok

12.5. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény emphegyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I\ \Big(|x-y| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon\Big)$.

Bizonyítsuk be, hogy ha f egyenletesen folytonos az $(0,1)$ intervallumban, akkor $\lim\limits_{+0} f$ létezik és véges.

12.6. A Cauchy-kritérium segítségével bizonyítsuk be, hogy ha $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, és minden x, y-ra $f(x) < (1+y)f(y)$, akkor f-nek véges jobboldali határértéke van a 0-ban.

12.7. Fel lehet-e bontani az $f(x) = x^2$ függvényt két periodikus függvény összegére?

12.8. Október 27-én, pénteken délben kezdődik a Schweitzer-verseny: https://www.bolyai.hu/versenyek-schweitzer-miklos-emlekverseny

Töltsétek le a feladatokat, szótározzátok ki, oldjátok meg és adjátok be.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható nov. 18-ig

PM 12.1. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

PM 12.2. Fel lehet-e bontani az identitásfüggvényt két periodikus függvény összegére?