13. Valós analízis gyakorlat, 2023. november 6. 16^{05}–17^{39}

13.1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek akármilyen kicsi periódusa létezik, és legalább egy pontban folytonos, akkor konstans.

13.2. Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

13.3. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = c$. Igaz-e ez az állítás $(a, b) \to (a, b)$ függvényekre?

13.4. Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton.

13.5. (a) Igaz-a a Weierstrass-tétel a racionális számok rendezett testében?
(b) Igaz-a a Weierstrass-tétel, nyílt intervallumon folytonos függvényekre?

Házi feladatok

13.6. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, és $f(2023) = 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan x valós szám, amire $|f(x)| = |x|$.

13.7. Vezessük le a Bolzano-Darboux tételt intervallumfelezéssel.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható nov. 18-ig

PM13.1. Igaz-e a Weierstrass-tétel a racionális tört függvények rendezett testében?