18. Valós analízis gyakorlat, 2023. november 21. 16^{05}–17^{39}

18.1. Hányadik deriváltról van szó?

- *Csökkent az infláció növekedésének dinamizmusa.* (Antall József miniszterelnök, 1992(?).)
- *Lassult a gazdasági folyamatok növekedésének dinamikája.* (Hegedűs Éva helyettes államtitkár, 2001.)
- *Csökken a járvány növekedésének dinamikája.* (Müller Cecília országos tisztifőorvos a Népszava ferdítésében, 2020. dec. 3.)
- *Idén egyre gyorsuló ütemben mérséklődött az ingatlanok drágulása, helyenként még csökkentek is az árak — derül ki az OTP Ingatlanpont összesítéséből.* (MTI, 2020. dec. 22.)

18.2. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \geq 0$-re $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

18.3. A Rolle-középértéktétel segítségéval bizonyítsuk be, hogy az $x^7 + 8x^2 + 5x - 23 = 0$ egyenletnek legfeljebb három különböző gyöke van.

18.4. A Lagrange-középértéktételből vezessük le, hogy $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leq |x - y|$.

18.5. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \text{ és} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Írjuk fel f deriváltját, és ellenőrizzük, hogy tényleg Darboux-tulajdonságú.

Házi feladatok

18.6. Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \geq 0$-re $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

18.7. Legfeljebb hány különböző nullhelye lehet az $f(x) = e^x - p(x)$ függvénynek, ha $p(x)$ egy n-edfokú polinom?

18.8. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely minden pontban differenciálható, de f' nem korlátos $[0,1]$-en.

18.9. (a) A Rolle-középértéktétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható a $[0,2]$ intervallumban, és $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (0,2)$, amelyre $f''(\xi) = 0$.

(b) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható a $[0,2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0,2)$, amelyre $f''(\xi) = f(0) - 2f(1) + f(2)$.

(Alkalmazzuk az (a) részt egy alkalmas $g(x) = f(x) - (ax^2 + bx + c)$ alakú függvényre.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható dec. 10-ig

PM18. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám és $x > 0$, akkor

$$\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{x}} - \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{x+2}} - + \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{x+n}} > 0.$$