19. Valós analízis gyakorlat, 2023. november 21. 16^{05}–17^{39}

19.1. (a) Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ függvény szigorúan konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le a, b \le 1$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

19.2. Általánosítsuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget tetszőleges (pozitív és negatív) kitevőkre.

19.3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{tg} 7x} = ? \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = ? \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} x} = ?$$

19.4. Gondoljuk meg, hogy a következő határértékek meghatározásában nem alkalmazható közvetlenül a L'Hospital-szabály. Miért nem? Léteznek-e a megadott határértékek?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

19.5. Végezzünk „teljes függvényvizsgálatot” az $\dfrac{e^x}{1+x}$ függvényen.

Házi feladatok

19.6. Igazoljuk, hogy a $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $\operatorname{tg} x$ függvény szigorúan konvex.

19.7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x + e^{-x} - 3}{\sin 2x + x^2 + \operatorname{sh} x} = ? \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log \cos ax}{\log \operatorname{ch} bx} = ? \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = ? \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{x^{-2}} = ?$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható dec. 10-ig

PM19. A nemnegatív x, y számokra $x^3 + y^4 \le x^2 + y^3$. Igazoljuk, hogy $x^3 + y^3 \le 2$.