20. Valós analízis gyakorlat, 2023. november 28. 16^{05}–17^{39}

Lagrange-maradéktagos Taylor-formula:

$$\forall x \in K \quad \exists \xi \in (a,x) \quad f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Cauchy-maradéktagos Taylor-formula:

$$\forall x \in K \quad \exists \xi \in (a,x) \quad f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n$$

20.1. Végezzünk „teljes függvényvizsgálatot” az $\dfrac{e^x}{1+x}$ függvényen.

20.2. Írjuk fel a $\log(\cos x)$ függvény 0 körüli harmadik Taylor-polinomját.

20.3. Írjuk fel az $f(x) = \log(1+x)$ függvény 0 körüli n-edik Taylor polinomját. A Lagrange- és a Cauchy-maradéktag segítségével adjunk felső becsléseket arra, hogy mekkora hibát követünk el akkor, ha a $[0, 0.5]$ intervallumon az ötödik Taylor polinommal közelítjük f-et.

Házi feladatok

20.4. Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin\sqrt{xy}$, vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$? (Írjuk fel a Jensen-egyenlőtlenséget egy alkalmas függvényre.)

20.5. Végezzünk „teljes függvényvizsgálatot” az $\sqrt[x]{x}$ függvényen.

20.6. Az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvényre felírt Taylor-formulából számítsuk ki $\pi = 4(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3})$ értékét 2 tizedesjegy pontossággal.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

Beadható dec. 15-ig

PM20. Előadáson a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktagos formáját úgy bizonyítottuk, hogy az $\dfrac{r(x)}{(x-a)^{n+1}}$ törtre $(n+1)$-szer alkalmaztuk a Cauchy-középértéktételt. Milyen függvényt írjunk a tört nevezőjében az $(x-a)^{n+1}$ függvény helyére, hogy ugyanez a bizonyítás a Cauchy-féle maradéktagot adja?